

学校编码: 10384

学 号: 19020201153275

厦門大學

硕 士 学 位 论 文

基于三角函数基 RKDG 方法的误差分析

Error Analysis of RKDG Method Based on Trigonometric
Basis

王昊

指导教师姓名: 邱建贤教授

专 业 名 称: 计算数学

论文提交日期: 2023 年 4 月

论文答辩日期: 2023 年 5 月

学位授予日期: 2023 年 6 月

2023 年 6 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果,均在文中以适当方式明确标明,并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外,该学位论文为()课题(组)的研究成果,获得()课题(组)经费或实验室的资助,在()实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称,未有此项声明内容的,可以不作特别声明。)

本人声明该学位论文不存在剽窃、抄袭等学术不端行为,并愿意承担因学术不端行为所带来的一切后果和法律责任。

声明人 (签名): 

指导教师 (签名):



2023 年 5 月 24 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（ ） 1. 经厦门大学保密委员会审查核定的涉密学位论文，
于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

（ ☒ ） 2. 不涉密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。涉密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：



2023 年 5 月 24 日

摘 要

本文中,我们完成了以下两部分工作:

1、我们研究了双曲守恒律方程在基于三角函数基近似空间的 RKDG(Runge Kutta Discontinuous Galerkin) 方法下的充分光滑解的全离散误差估计, 本文中的时间离散采用二阶显式 TVD(Total Variation Diminishing) 龙格库塔. 在合适的 CFL 条件下, 该误差估计可达 $(k+m)$ 阶, 其中 m 取决于所选择的数值通量, 在迎风数值通量条件下, $m = 1$, 在一般的单调数值通量的条件下, $m = \frac{1}{2}$.

2、我们证明了双曲守恒律方程在基于三角函数基近似空间的 RKDG 方法下的充分光滑解的负阶范数估计可达到 $(2k+m)$ 阶, 进一步, 我们通过使用由 B 样条的线性组合组成的卷积核来提取 DG 解中“隐藏的精度”, 验证了线性双曲守恒律方程在基于三角函数基近似空间的 RKDG 解经过 SIAC 过滤器处理后的解可以达到 $(2k+m)$ 阶的超收敛效果, 其中 m 取决于所选择的数值通量.

关键词: 双曲型守恒律方程; 离散 Galerkin 方法; 三角函数基近似空间; 有限元; TVD 龙格库塔; 负阶范数; SIAC 过滤器; 后处理

Abstract

In this paper, we completed the following two parts of work:

1. We study the fully discrete error estimation of sufficiently smooth solutions of hyperbolic conservation law equations using RKDG(Runge-Kutta Discontinuous Galerkin) method based on the approximate space of trigonometric function bases. Among them, the time discretization is of second-order display TVD(Total Variation Diminishing)Runge Kutta method. The error estimation can reach the order of $(k+m)$ under appropriate CFL condition, where m depends on the selected numerical flux. Under the condition of upwind numerical flux, $m = 1$, Under the general condition of monotone numerical flux, $m = \frac{1}{2}$.

2. We show that the negative norm estimation of sufficiently smooth solutions of hyperbolic conservation law equations under the RKDG method based on the approximation space of trigonometric function bases can reach order $(2k+m)$. Further, we can extract the "hidden precision" in DG solutions by using convolution kernel composed of linear combinations of B-splines. We show that the hyperbolic conservation law of the linear hyperbolic equation can achieve superconvergence of order $(2k+m)$ in the solution of RKDG based on the approximation space of trigonometric functions after SIAC filter treatment, where m depends on the selected numerical flux.

Key Words: Hyperbolic conservation law equation; Discontinuous Galerkin method; Trigonometric approximation space; Finite Element; TVD Runge-Kutta; Negative-order norm; SIAC filter; Post-processing

Contents

第一章 引言	1
1.1 研究背景	1
1.2 DG 方法	3
1.3 二阶 RK 方法	3
1.4 SIAC 过滤器	4
1.5 本文创新点	6
1.6 本文思路和分工	6
第二章 三角函数基 RKDG 方法的误差分析	7
2.1 基于三角函数基的 RKDG 方法	7
2.2 误差方程和能量方程	9
2.3 Sobolev 空间的一些符号说明	11
2.4 Sobolev 空间的一些结论	11
2.5 三角函数基有限元空间的插值不等式	13
2.6 分段三角函数有限元空间 $\tilde{V}_h^k$ 上的逆不等式	17
2.7 三角函数基 RKDG 的误差分析结论	20
第三章 基于三角函数基的 RKDG 解的超收敛后处理	23
3.1 基于三角函数基的 RKDG 近似解的负阶范数估计	23
3.2 基于三角函数基的 SIAC 后处理的超收敛误差估计	32
3.3 高效进行后处理	33
第四章 数值实验	35
第五章 总结与展望	43
第六章 附录	45
6.1 引理 2.2.1 的证明	45

6.2 定理 2.7.1 的证明	47
参考文献	72
致谢	73

Contents

Chapter 1	Introduction	1
1.1	Research background	1
1.2	DG method	3
1.3	Second order RK method	3
1.4	SIAC filter	4
1.5	Innovation of this paper	6
1.6	This article thought and division of labor	6
Chapter 2	Error analysis of trigonometric function basis RKDG method	7
2.1	RKDG method based on trigonometric function basis	7
2.2	Error equation and energy equation	9
2.3	Some symbolic description of Sobolev space	11
2.4	Some conclusions on Sobolev space	11
2.5	Interpolation inequalities in trigonometric basis finite element space	13
2.6	Inverse Inequality on piecewise trigonometric function finite element space $\widetilde{V}_h^k$	17
2.7	Error analysis of trigonometric basis RKDG	20
Chapter 3	Negative norm estimation of RKDG approximate solutions based on trigonometric function basis and superconvergence results of SIAC post-processing	23
3.1	Superconvergence error estimation of SIAC post-processing based on trigonometric function basis	23
3.2	Negative norm estimation of approximate solution of RKDG based on trigonometric function basis	32

3.3 Efficient post-processing	33
Chapter 4 Numerical experiment	35
Chapter 5 Summary and Prospect	43
Chapter 6 Appendix	45
6.1 The proof of lemma 2.2.1	45
6.2 The proof of the theorem2.7.1	47
References	72
Acknowledgements	73

第一章 引言

本章首先介绍标量守恒律方程关于 RKDG(Runge-Kutta Discontinuous Galerkin) 方法和 SIAC (Smoothness-Increasing-Accuracy-Conserving) 后处理的误差分析的研究背景, 随后介绍 2 阶 RK 方法, 传统 DG(Discontinuous Galerkin) 方法, 以及具有超收敛性质的后处理方法: SIAC 过滤器, 然后介绍本文的主要创新点, 最后介绍本文的思路以及各节分工.

1.1 研究背景

双曲型守恒律方程为 20 世纪 50 年代兴起的一个研究领域, 它是数学与力学之间的一个重要枢纽, 在流体力学、空气动力学、天体物理、航空航天、国防等领域有重要的应用. 这类偏微分方程所涵盖的物理问题模型非常广泛, 几乎所有的连续体力学的模型方程均属于这种形式, 其中包含了气体、液体、弹性体、等离子体、星云等等.

数值例子表明, 仔细选择近似空间来拟合个别具有特殊初始条件和边界条件的偏微分方程往往能比基于相同精度阶数的多项式近似空间的 DG 方法提供更准确的结果. 此外, 以往利用 SIAC 提取线性双曲守恒律方程 DG 解的超收敛精度的研究主要集中在基于多项式基的近似空间, 我们现在将这种后处理技术推广到基于三角函数基的近似空间的 DG 解.

本文中, 我们考虑如下具有周期边界条件的标量守恒律方程:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}, x \in \Omega, t \in [0, 1] \quad (1.1.1)$$

本文只讨论一维情形, 不妨设 $\Omega = I = [0, 1]$, 并且假设 $f(u)$ 是 u 的光滑函数并且满足 $f \in C^3$, 我们只考虑(1.1.1) 的光滑解的误差分析. 首先, 我们回顾 DG 方法关于双曲方程负阶范数估计和后处理的一些超收敛结果. 后处理的基本思想是用局部平均算子卷积数值解, 目的是获得更好的逼近, 通常是更高阶的逼近. Zhang 和 Shu 在一系列论文^{[1][2][3]} 中给出了非线性守恒律光滑解的 RKDG 的

L^2 范数的先验误差估计, Xu 等人随后将之推广到了负阶范数的误差估计^[4]. 利用负阶范数中包含的信息的局部后处理技术最初是由 Bramble 和 Schatz^[5] 在椭圆问题的连续有限元方法中发展起来的, 并由 Bramble 等人推广到抛物方程, 他们证明了通过将有限元解与点 x 附近的局部平均算子卷积, 可以构建超收敛逼近, 其中负阶范数的收敛性高于 L^2 范数. 随后 Cockburn 和 Shu 在^{[6][7]} 中建立了一个框架, 借助负阶范数估计建立了双曲方程 DG 方法的后处理技术理论, 并证明了相应的超收敛结果. Ryan 等人后来从不同方面对这种后处理技术的扩展进行了充分的研究, 例如对于一般边界条件^[8], 对于均匀网格^[9], 以及改善流线的可视化方面的应用^[10], 该后处理技术在^[10] 中被 Ryan 等人命名为 SIAC(Smoothness-Increasing-Accuracy-Conserving) 过滤器.

Bramble 和 Schatz 在^[11] 中给出了 SIAC 后处理的误差估计, 它将经过 SIAC 过滤的 DG 解的误差估计与 DG 解的负阶范数估计联系起来, 利用这种思想, Xu 在^[4] 中, 结合^[1] 关于双曲守恒型方程 RKDG 的全离散的误差估计可达 $O(h^{k+m})$ 的结论, 证明了 DG 解的负阶范数估计可达 $O(h^{2k+m})$, 进而推出线性双曲守恒型方程的 DG 解经过 SIAC 后处理的解具有 $O(h^{2k+m})$ 的超收敛阶, 其中 m 取决于所选择的数值通量.

上面的工作都是建立在分段代数多项式有限元空间 V_h^k 的基础上的, Yuan 在^[12] 中表明, 当数值通量为普通的单调数值通量时, 线性双曲型方程在基于三角函数基的 DG 格式的半离散误差估计理论可达 $O(h^{k+\frac{1}{2}})$. Zhang 在^[1] 中表明, 双曲型方程在基于代数多项式基的 RKDG 格式的全离散误差估计理论可达 $O(h^{k+m})$. 我们结合两者的思想, 证明了双曲型方程在基于三角函数基的 RKDG 格式的全离散误差估计理论也可达 $O(h^{k+m})$. 在此基础上, 我们进一步证明了双曲型方程在基于三角函数基的 RKDG 格式的解的负阶范数估计也可达 $O(h^{2k+m})$. 继而导出线性双曲型方程在基于三角函数基的 RKDG 格式的解经过 SIAC 后处理也具有 $O(h^{2k+m})$ 的超收敛阶的结论, 其中 m 取决于所选择的数值通量.

证明上述猜想的第一个难点在于, 基于三角函数基的 DG 方法的解的误差估计需要重新证明, 因为该误差分析的证明实际上就是反复利用 Taylor 展开, Young's 不等式, 逆不等式, Gronwall 不等式^[13], 所以我们需要证明当有限元空间是由分段三角函数基张成的时候, 逆不等式仍然成立. 第二个难点在于, 如何利用三角函数基的特性, 并结合基于三角函数基的 DG 方法的解的误差估计, 来得到基于三角函数基的 DG 方法的解的负阶范数估计.

1.2 DG 方法

这里我们简单地回顾一下求解双曲问题的基于代数多项式基的 DG 方法. 首先, 考虑一维守恒律方程(1.1.1), 将区间 $I = [0, 1]$ N 等分, 对于每一个区间端点 $\{x_{j+\frac{1}{2}}\}_{j=0}^N$, 我们令 $I_j = (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$, $h_j = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$, $j = 1, \dots, N$, 我们定义 $h = \max_{1 \leq j \leq N} h_j$, 如果我们将(1.1.1)乘以任意测试函数 $v(x)$, 在区间 I_j 上积分, 并分部积分, 我们可以得到如下弱形式:

$$\int_{I_j} u_t v \, dx - \int_{I_j} f(u) v_x \, dx + f(u_{j+\frac{1}{2}}) v_{j+\frac{1}{2}} - f(u_{j-\frac{1}{2}}) v_{j-\frac{1}{2}} = 0,$$

这里 $u_{j+\frac{1}{2}} = u(x_{j+\frac{1}{2}})$, 我们用 u_h, v_h 分别替代真解 u 和测试函数 v , 其中 u_h, v_h 均在分段代数多项式近似空间 V_h^k 中, 其中:

$$V_h^k = \left\{ v : v|_{I_j} \in P^k(I_j), j = 1, \dots, N \right\},$$

$P^k(I_j)$ 是区间 I_j 上次数至多为 k 的多项式空间.

DG 方法如下: 找到 $u_h^n \equiv u_h^n(x) \in V_h^k$, 使得对任意 $v_h \equiv v_h^n(x) \in V_h^k, 1 \leq j \leq N$, 有:

$$\int_{I_j} (u_h)_t v_h \, dx - \int_{I_j} f(u_h) (v_h)_x \, dx + \hat{f}(u_h)_{j+\frac{1}{2}} (v_h)_{j+\frac{1}{2}}^- - \hat{f}(u_h)_{j-\frac{1}{2}} (v_h)_{j-\frac{1}{2}}^+ = 0, \quad (1.2.1)$$

其中数值通量 $\hat{f}(u)_{j+\frac{1}{2}} = f(u_{j+\frac{1}{2}}^-, u_{j+\frac{1}{2}}^+)$.

(1.2.1) 是一个关于时间的常微分方程, 可以用 RK 方法离散, 进而得到全离散的格式.

1.3 二阶 RK 方法

对于双曲问题, 我们经常使用一类高阶非线性稳定 RK 时间离散. 这类时间离散的一个显著特征是它们是一阶向前欧拉的凸组合, 因此它们在向前欧拉的任何半范数 (总变分半范数、最大范数、熵条件等) 下都保持很强的稳定性. 这些方法首先在^{[14][15]}中提出, 随后在^{[16][17]}中得以推广. 我们这里介绍如下 2 阶 RK 方法: 考虑

$$u_t = L(u, t),$$

其中 $L(u, t)$ 是一个空间离散算子, 则二阶 RK 方法如下:

$$\begin{aligned} u_1 &= u^n + \Delta t L(u^n, t^n), \\ u^{n+1} &= \frac{1}{2}u^n + \frac{1}{2}(u_1 + \Delta t L(u_1)). \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

1.4 SIAC 过滤器

SIAC 过滤器是 Bramble 和 Schatz^[5] 为有限元方法能获得更好的逼近而提出的一种后处理技术, 该后处理技术随后在^[7] 中被推广到 DG 方法中. 在一维情况下, 过滤后的近似解 u_h^* 为:

$$u_h^* = K_h^{2k+1, k+1} * u_h,$$

其中 $K_h^{2k+1, k+1} = \frac{K^{2k+1, k+1}(\frac{x}{h})}{h^d}$ (d 是空间的维数, h 是区间的长度). $K^{2k+1, k+1}(x)$ 满足以下三个性质:

- (1) $K^{2k+1, k+1}$ 具有紧支集.
- (2) $K^{2k+1, k+1}$ 通过卷积重构了 $(2k)$ 次多项式有限元空间的基函数 p (卷积重构性), 即:

$$K^{2k+1, k+1} * p = p, \quad p = 1, x, x^2, \dots, x^{2k}. \quad (1.4.1)$$

- (3) $K^{2k+1, k+1}$ 是 B-样条的线性组合. 即:

$$K^{2k+1, k+1}(y) = \sum_{\gamma=-k}^k c_{\gamma}^{2k+1, k+1} \psi^{(k+1)}(y - \gamma),$$

其中 $\psi^{(k+1)}(y - \gamma)$ 是 B-样条^[18], B-样条函数 $\psi^{(i)}$ 是通过递归来定义的:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= \chi, \\ \psi^{(n+1)} &= \psi^{(n)} * \chi, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

χ 是区间 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上的特征函数, 即 $\chi_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

例如

$$\psi^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2} \\ 1, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \psi^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x+1, & -1 \leq x < 0 \\ -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\psi^{(3)}(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2, & -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} - x^2, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \left(-x + \frac{3}{2}\right)^2, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \\ 0, & x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$c_{\gamma}^{2k+1, k+1} \in R$ 是依据 (1.4.1) 确定的常系数

例如 $k = 1$ 时, 则有

$$K^{3,2}(x) * 1 = 1,$$

$$K^{3,2}(x) * x = x,$$

$$K^{3,2}(x) * x^2 = x^2,$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & x & x-1 \\ x^2 + 2x + \frac{7}{6} & x^2 + \frac{1}{6} & x^2 - 2x + \frac{7}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow c_{-1} = -\frac{1}{12}, c_0 = \frac{7}{6}, c_1 = -\frac{1}{12},$$

同理 $k = 2$ 时, 可得:

$$c_{-2} = \frac{37}{1920}, c_{-1} = -\frac{97}{480}, c_0 = \frac{437}{320}, c_1 = -\frac{97}{480}, c_2 = \frac{37}{1920}.$$

这三个对于卷积核的性质是基于以下观察结果:

1、第一个性质, 从计算的角度来看, 卷积核具有紧支集是有利的.

- 2、第二个性质,保证了 $(k + 1)$ 阶精度不会被后处理破坏掉.
- 3、第三个性质,允许我们用简单的差商来表示与核的卷积的导数.

1.5 本文创新点

本文的创新点有以下两个:

- 1、Zhang 在^[1]中给出了双曲守恒型方程的基于多项式基 RKDG 解的全离散误差分析,Yuan 在^[12]中给出了双曲守恒型方程的基于三角函数基的 DG 解的半离散误差分析,我们结合两者的工作,给出了双曲守恒型方程的基于三角函数基的 RKDG 解的全离散误差分析.
- 2、我们给出了基于三角函数的 RKDG 近似解的负阶范数估计,进而导出了基于三角函数基的 RKDG 近似解经过 SIAC 后处理的超收敛结论.

1.6 本文思路和分工

本文思路如下:我们先给出标量守恒律方程 (1.1.1) 的光滑解在分段三角基有限元空间 $\tilde{V}_h^k$ 下的误差估计,然后利用这个误差估计,得出在该空间下的负模范数估计,最后得出 SIAC 后处理的超收敛误差估计.

本文各章分工如下:

第二章我们介绍分段三角基有限元空间 $\tilde{V}_h^k$ 的相关定义,并给出三角函数基有限元空间的插值不等式、逆不等式和 RKDG 方法的全离散误差分析.第三章我们给出基于三角函数基的 RKDG 近似解的负阶范数估计和 SIAC 后处理的超收敛误差估计.第四章是数值实验.第五章是总结与展望.最后在附录中给出定理的证明.

第二章 三角函数基 RKDG 方法的误差分析

本节介绍分段三角函数基有限元空间 $\tilde{V}_h^k$ 的相关定义并得到误差估计所需要的误差方程和能量方程.

2.1 基于三角函数基的 RKDG 方法

求解双曲守恒律的 DG 方法的细节可以在 Cockburn 的系列论文^{[19][20][21]} 中找到. 对于区间 $I = [0, 1]$ 的每一个部分 $\left\{x_{j+\frac{1}{2}}\right\}_{j=0}^N$, 我们令 $I_j = \left(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}\right)$, $h_j = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$, $j = 1, \dots, N$, 我们定义 $h = \max_{1 \leq j \leq N} h_j$, 通过数值格式得到的解为 $\tilde{u}_h^n(x) = \tilde{u}_h(x, t_n)$ 其中 $\tilde{u}_h^n(x) \in \tilde{V}_h^k$, $\tilde{V}_h^k = \left\{v \in L^1(0, 1) : v|_{I_j} \in \tilde{P}^k(I_j), j = 1, \dots, N\right\}$ $\tilde{P}^k(I_j)$ 为 I_j 上 “次数” 至多为 k 的三角函数基空间, 如

$$\tilde{P}^k(I_j) = \text{span}\left\{\overbrace{1, \sin(x - x_j), \cos(x - x_j), \sin 2(x - x_j), \cos 2(x - x_j), \dots}^{k+1 \text{ 个}}\right\},$$

注意到 $\tilde{V}_h^k$ 上的函数在区间单元交界处是可以有间断的. 我们考虑从 $p \in L^2(0, 1)$ 到 $\tilde{V}_h^k$ 的标准 L^2 - 投影, 定义为 $\tilde{P}_h p$, 它被定义为有限元空间 $\tilde{V}_h^k$ 中唯一的函数, 满足:

$$\int_0^1 \left(\tilde{P}_h p(x) - p(x)\right) \tilde{v}_h(x) dx = 0, \forall \tilde{v}_h(x) \in \tilde{V}_h^k, \quad (2.1.1)$$

为了符号的方便, 我们为任意函数 p 和 q 引入算子:

$$H_j(p, q) \triangleq \int_{I_j} f(p) \partial_x q(x) dx - \hat{h}(p)_{j+\frac{1}{2}} q\left(x_{j+\frac{1}{2}}^-\right) + \hat{h}(p)_{j-\frac{1}{2}} q\left(x_{j-\frac{1}{2}}^+\right), \quad (2.1.2)$$

其中 $\hat{h}(p)_{j+\frac{1}{2}}$ 是一个单调的数值通量, 依赖于 p 在间断点 $\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t\right)$ 的两个值 $\hat{h}(p)_{j+\frac{1}{2}}(t) = \hat{h}\left(p\left(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t\right), p\left(x_{j+\frac{1}{2}}^+, t\right)\right)$, 所谓的单调数值通量, 是指一个函数 $\hat{h}(a, b)$ 满足以下条件:

- (a) 它是 Lipschitz 连续的, 因此在任何有界区间上都有界.
- (b) 它和 $f(p)$ 是相容的, i.e. $\hat{h}(p, p) = f(p)$.
- (c) 它是第一个参数的非递减函数, 是第二个参数的非递增函数. 此外, 对任意函

数 p , 我们使用下面的记号:

$$[p] = p^+ - p^-, \quad \bar{p} = \frac{p^+ + p^-}{2}, \quad p_{j+\frac{1}{2}}^\pm = p\left(x_{j+\frac{1}{2}}^\pm\right), \quad (2.1.3)$$

类似于 (1.2.1), 我们可以得到三角函数基的 DG 方法: 找到 $\tilde{u}_h^n \equiv \tilde{u}_h^n(x) \in \tilde{V}_h^k$, 使得对任意 $\tilde{v}_h \equiv \tilde{v}_h(x) \in \tilde{V}_h^k$, 有:

$$\int_{I_j} (\tilde{u}_h)_t \tilde{v}_h dx - \int_{I_j} f(\tilde{u}_h) (\tilde{v}_h)_x dx + \hat{f}(\tilde{u}_h)_{j+\frac{1}{2}} (\tilde{v}_h)_{j+\frac{1}{2}}^- - \hat{f}(\tilde{u}_h)_{j-\frac{1}{2}} (\tilde{v}_h)_{j-\frac{1}{2}}^+ = 0, \quad (2.1.4)$$

其中数值通量 $\hat{f}(u)_{j+\frac{1}{2}} = f\left(u_{j+\frac{1}{2}}^-, u_{j+\frac{1}{2}}^+\right)$,

将 (2.1.4) 代入二阶 RK 格式 (1.3.1) 中, 我们得到基于三角函数基的全离散 RKDG 方法:

命题 2.1.1 ^[1]: (基于三角函数基的全离散 RKDG 方法) 找到 $\tilde{w}_h^n \equiv \tilde{w}_h^n(x) \in \tilde{V}_h^k, \tilde{u}_h^{n+1} \equiv \tilde{u}_h^{n+1}(x) \in \tilde{V}_h^k$, 使得对任意 $\tilde{v}_h \equiv \tilde{v}_h(x) \in \tilde{V}_h^k, 1 \leq j \leq N$, 有:

$$\int_{I_j} \tilde{w}_h^n \tilde{v}_h dx = \int_{I_j} \tilde{u}_h^n \tilde{v}_h dx + \tau \cdot H_j(\tilde{u}_h^n, \tilde{v}_h), \quad (2.1.5a)$$

$$\int_{I_j} \tilde{u}_h^{n+1} \tilde{v}_h dx = \frac{1}{2} \int_{I_j} \tilde{u}_h^n \tilde{v}_h dx + \frac{1}{2} \int_{I_j} \tilde{w}_h^n \tilde{v}_h dx + \frac{\tau}{2} \cdot H_j(\tilde{w}_h^n, \tilde{v}_h), \quad (2.1.5b)$$

其中 $u_h^0 = \tilde{P}_h u_0(x)$.

为了后续方便, 我们定义如下表达式:

引理 2.1.2 ^[1]: 对任意和 f 相容的单调数值通量 $\hat{f}$, (即 $\hat{f}(p, p) = f(p)$) 定义:

$$\alpha(\hat{f}, p) = \alpha(f; p^-, p^+) \triangleq \begin{cases} [p]^{-1}(f(\bar{p}) - \hat{f}(p)), & [p] \neq 0. \\ |f'(\bar{p})|, & [p] = 0. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

则有如下结论成立: 对任意 $p = (p^-, p^+) \in R^2$,

$$\alpha(\hat{f}, p) \geq 0, \quad (2.1.7a)$$

$$\alpha(\hat{f}, p) \text{ 有界}, \quad (2.1.7b)$$

$$\frac{1}{2} |f'(\bar{p})| \leq \alpha(\hat{f}, p) + C_* |[p]|, \quad (2.1.7c)$$

$$-\frac{1}{8} f''(\bar{p}) [p] \leq \alpha(\hat{f}, p) + C_* [p]^2, \quad (2.1.7d)$$

其中正常数 C_* 只与 $\max(|f''|, |f'''|)$ 有关.

2.2 误差方程和能量方程

为了得到全离散 RKDG(2.1.5) 的误差估计, 我们需要得到该格式的误差方程, 类似于^[22], 第一步推导时间上的截断误差.

引理 2.2.1^[1]: 假设 u 是 (1.1.1) 导数有界的充分光滑解, 定义

$$w(x, t) = u(x, t) + \partial_t u(x, t) \cdot \tau, \quad (2.2.1)$$

则对任意 $v(x) \in L^2(I_j), 1 \leq j \leq N$, 有

$$\int_{I_j} w(x, t^n) v(x) dx = \int_{I_j} u(x, t^n) v(x) dx + \tau \cdot H_j(u(x, t^n), v(x)), \quad (2.2.2a)$$

$$\begin{aligned} \int_{I_j} u(x, t^{n+1}) v(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{I_j} u(x, t^n) v(x) dx + \frac{1}{2} \int_{I_j} w(x, t^n) v(x) dx \\ &\quad + \frac{\tau}{2} \cdot H_j(w(x, t^n), v(x)) + \int_{I_j} E(x; n) v(x) dx, \end{aligned} \quad (2.2.2b)$$

其中 $E(x; n) = O(\tau^3)$.

证明: 该引理的证明过程类似于^[1]的证明, 后续其他定理的证明会用到该引理证明过程中出现过的式子, 为了后续定理的证明的完整性, 我们将该引理的证明写到附录中.

我们记 RKDG 格式的每一层的近似误差为 $\tilde{e}_u^n = u(t^n) - \tilde{u}_h^n, \tilde{e}_w^n = w(t^n) - \tilde{w}_h^n$, 因为 $\tilde{v}_h = \tilde{v}_h(x) \in \tilde{P}^k(I_j)$, 所以 $\tilde{v}_h \in L^2(I_j)$, 则由引理2.1.2 和格式 (2.2.2), 我们得到如下误差方程:

推论 2.2.2^[1]: (误差方程) 对任意 $\tilde{v}_h \in \tilde{P}^k(I_j), 1 \leq j \leq N$

$$\int_{I_j} \tilde{e}_w^n \tilde{v}_h dx = \int_{I_j} \tilde{e}_u^n \tilde{v}_h dx + \tau \cdot H_j(u^n, \tilde{v}_h) - \tau \cdot H_j(\tilde{u}_h^n, \tilde{v}_h), \quad (2.2.3)$$

$$\int_{I_j} \tilde{e}_u^{n+1} \tilde{v}_h dx = \int_{I_j} \left(\frac{1}{2} \tilde{e}_u^n + \frac{1}{2} \tilde{e}_w^n + E(x; n) \right) \tilde{v}_h dx + \frac{\tau}{2} \cdot H_j(w^n, \tilde{v}_h) - \frac{\tau}{2} \cdot H_j(w_h^n, \tilde{v}_h), \quad (2.2.4)$$

其中 $E(x; n) = O(\tau^3), u^n = u(t^n)$,

$$w^n = w(t^n) = w(x, t^n) = u(x, t^n) - \partial_x f(u(x, t^n)) \cdot \tau,$$

$$w_h^n = u_h(x, t^n) - \partial_x f(u_h(x, t^n)) \cdot \tau.$$

在有限元方法的误差分析中, 我们通常用 $\tilde{\eta}_w = \tilde{P}_h w - w, \tilde{\eta}_u = \tilde{P}_h u - u$ 表示 w 和 u 的插值逼近, 其中投影 $\tilde{P}_h$ 的定义见 (2.1.1) 我们记 $\tilde{\xi}_u = \tilde{P}_h u - \tilde{u}_h, \tilde{\xi}_w = \tilde{P}_h w - \tilde{w}_h$, 则每一层的误差可以写成 $\tilde{e}_w^n = \tilde{\xi}_w^n - \tilde{\eta}_w^n, \tilde{e}_u^n = \tilde{\xi}_u^n - \tilde{\eta}_u^n$, 经过一个简单的代入计算, 误差方程 (2.2.3), (2.2.4) 可以重写成如下能量方程:

推论 2.2.3 ^[1]:

$$\int_{I_j} \tilde{\xi}_w^n \tilde{v}_h dx = \int_{I_j} \tilde{\xi}_u^n \tilde{v}_h dx + \tilde{K}_j^n(\tilde{v}_h), \quad \forall \tilde{v}_h(x) \in \tilde{P}^k(I_j) \quad (2.2.5a)$$

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \tilde{\xi}_u^{n+1} \tilde{v}_h dx &= \int_{I_j} \left(\frac{1}{2} \tilde{\xi}_u^n + \frac{1}{2} \tilde{\xi}_w^n \right) \tilde{v}_h dx + \frac{1}{2} \tilde{L}_j^n(\tilde{v}_h) \\ &= \int_{I_j} \tilde{\xi}_u^n \tilde{v}_h dx + \frac{1}{2} \tilde{K}_j^n(\tilde{v}_h) + \frac{1}{2} \tilde{L}_j^n(\tilde{v}_h), \quad \forall \tilde{v}_h(x) \in \tilde{P}^k(I_j) \end{aligned} \quad (2.2.5b)$$

其中

$$\tilde{K}_j^n(\tilde{v}_h) \triangleq \int_{I_j} (\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n) \tilde{v}_h dx + \tau \cdot H_j(u^n, \tilde{v}_h) - \tau \cdot H_j(\tilde{u}_h^n, \tilde{v}_h), \quad (2.2.6)$$

$$\tilde{L}_j^n(\tilde{v}_h) \triangleq \int_{I_j} (2\tilde{\eta}_u^{n+1} - \tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n + 2E(x; n)) \tilde{v}_h dx + \tau \cdot H_j(w^n, \tilde{v}_h) - \tau \cdot H_j(\tilde{w}_h^n, \tilde{v}_h), \quad (2.2.7)$$

定义 $\tilde{K}^n(v_h) = \sum_{j=1}^N \tilde{K}_j^n(v_h), \quad \tilde{L}^n(v_h) = \sum_{j=1}^N \tilde{L}_j^n(v_h)$.

下面我们将用 (2.2.5) 来分析 RKDG 方法的误差, 在 (2.2.5a) 中令测试函数 $\tilde{v}_h = \tilde{\xi}_u^n$, 在 (2.2.5b) 中令测试函数 $\tilde{v}_h = \tilde{\xi}_w^n$, 经过一个简单的代入计算, 可以得到:

推论 2.2.4 : (能量方程)

$$\tilde{K}^n(\tilde{\xi}_u^n) + \tilde{L}^n(\tilde{\xi}_w^n) = \|\tilde{\xi}_u^{n+1}\|^2 - \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 - \|\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n\|^2, \quad (2.2.8)$$

接下来, 我们将用能量方程来分析 RKDG 格式的误差.

2.3 Sobolev 空间的一些符号说明

$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega), D^{\vec{\alpha}}v \in L^p(\Omega); |\vec{\alpha}| \leq k\}$, 其中 $D^{\vec{\alpha}}v$ 为 v 的广义导数, (为了书写方便, 后续用 α 代替 $\vec{\alpha}$), $W^{k,p}(\Omega)$ 的范数和半范数定义如下:

$$\begin{aligned} \|v\|_{m,p,\Omega} &= \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \\ \|v\|_{m,\infty,\Omega} &= \|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}, \\ |v|_{m,p,\Omega} &= |v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \\ |v|_{m,\infty,\Omega} &= |v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

我们对本文中出现的空间的简写, 范数的定义提前做出如下解释:

$$\begin{aligned} W^{k,p}(I) &= \{v \in L^p(I), D^\alpha v \in L^p(I); 0 \leq \alpha \leq k\}, \\ H^k &= W^{k,2}, \end{aligned}$$

$$\text{范数: } \|v_h\|_{\Gamma_h}^2 = \sum_{j=1}^N \left| v_h \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right|^2. \quad (2.3.2)$$

对于后面证明中会出现的 $v_h \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right)$, 提前做出如下解释: 注意到 v_h 在 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处间断, 但只要能通过一致的方法来表示 $v_h \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right)$, 都可以视作 $v_h \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right)$ 的取值, 例如以在左侧点 $x_{j+\frac{1}{2}}^-$ 处的值来代替 $v_h \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right)$, 则 $\sum_{j=1}^N \left(v_h \left(x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) \right)^2 = \|v_h\|_{\Gamma_h}^2$.

2.4 Sobolev 空间的一些结论

我们研究的区域记为 Ω , 将区域 $\bar{\Omega}$ 剖分成有限个子区域, 以 T 记任一子区域, 称为单元, ∂T 为单元边界, 所有单元的全体组成的集合记为 $\mathcal{T}_h$, $\mathcal{T}_h$ 是对区域 Ω 的一个剖分, 满足: $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ 有限元空间 X_h 由一个三元组 (T, P, Σ) 确定^[23], 其中 $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$, $h_T = \text{diam } T$, 一维时, h_T 就是小区间的长度.

$T \in \mathcal{T}_h$ 是单元.

P : 是定义在 T 上的给定类型 (如给定次数的多项式空间).

Σ : 是唯一地确定 T 上插值多项式 $p \in P$ 的插值数据 (例如 $\Sigma = \{p(A_i), A_i$ 是插

值顶点, $p \in P(T)\}$).

定义 2.4.1 : 称两个有限元 $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ 和 (T, P, Σ) **仿射等价**, 如果存在一个可逆仿射变换 $F: \hat{T} \rightarrow T$ 使得: $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b = x \in T$, 对任意 $\hat{x} \in \hat{T}$, 满足下述 4 个条件:

- i) $T = F(\hat{T})$.
- ii) $P = \left\{ p: T \rightarrow R \mid p|_p = \hat{p} \circ F^{-1} = \hat{p}(F^{-1}), \hat{p} \in \hat{P} \right\}$.
(如 $p(A_i) = p\left(F\left(\hat{A}_i\right)\right) = p \circ F\left(\hat{A}_i\right) = \hat{p}\left(\hat{A}_i\right)$)
- iii) $A_i^{(r)} = F\left(\hat{A}_i^{(r)}\right), \quad r = 0, 1, 2$
- iiii) $\xi_{ik}^{(1)} = B\xi_{ik}^{(1)}, \quad \xi_{ik}^{(2)} = B\xi_{ik}^{(2)}.$

下面的定理揭示了仿射等价有限元之间的 Sobolev 半范数的关系:

定理 2.4.2 ^{[24], [25]}: 设 T 和 $\hat{T}$ 是仿射等价的, 即存在可逆仿射变换 $F: \hat{T} \rightarrow T$

$$\text{使得: } F(\hat{x}) = B\hat{x} + \vec{b} = \vec{x} \in T, \quad \text{对任意 } \hat{x} \in \hat{T} \quad (2.4.1)$$

若 $v \in W^{m,p}(T)$, 令

$$v(\vec{x}) = v \circ F(\hat{x}) \triangleq \hat{v}(\hat{x}), \quad (2.4.2)$$

则 $\hat{v} \in W^{m,p}(\hat{T})$, 且

$$|\hat{v}|_{m,p,\hat{T}} \leq C \|B\|^m |\det B|^{-\frac{1}{p}} |v|_{m,p,T}, \quad (2.4.3)$$

其中 $C = C(m, n)$ 为正常数, $\|B\|$ 是矩阵 B 的 *Euclid* 范数, 类似的:

$$|v|_{m,p,T} \leq C \|B^{-1}\|^m |\det B|^{\frac{1}{p}} |\hat{v}|_{m,p,\hat{T}}. \quad (2.4.4)$$

下面利用 T 及 $\hat{T}$ 的几何数据来估计 $\|B\|$ 和 $\|B^{-1}\|$

定理 2.4.3 ^{[24], [23]}:

$$\|B\| \leq \frac{h}{\hat{\rho}}, \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho}, \quad (2.4.5)$$

其中 $h_T = \text{diam } T, \hat{h}_T = \text{diam } \hat{T}, \rho_T = \sup\{\text{diam } S; \text{球 } S \subset T\}, \hat{\rho}_T = \sup\{\text{diam } \hat{S}; \text{球 } \hat{S} \subset \hat{T}\}$

注 2.4.4 ^[25]:

$$|\det B| = \frac{\text{meas}(T)}{\text{meas}(\hat{T})}, \quad (2.4.6)$$

此即 F 的 *Jacobi* 矩阵的行列式.

注 2.4.5 : 如果存在一个常数 $\sigma \geq 1$, 使得:

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma, \text{ 任意 } h > 0. \quad (2.4.7)$$

则称剖分 $\mathcal{T}_h$ 是 (拟) 正则 (*regular*) 的, 且有

$$[\text{meas}(T)]^{-1/2} \leq Ch_T^{-d/2}. \quad (2.4.8)$$

定义 2.4.6 : 如果 $\mathcal{T}_h$ 是 (拟) 正则的, 并且存在 常数 $\tau > 0$, 使得对任意 $h > 0$, 有:

$$\min_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \geq \tau h,$$

则称 $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 的拟一致剖分 (*quasi-uniform*).

2.5 三角函数基有限元空间的插值不等式

接下来, 我们给出这个投影的一些插值不等式, 下面将使用 Sobolev 空间中常用的范数和半范数表示法. 为了后续定理的证明, 参考^[12], 给出以下 3 个性质:

命题 2.5.1 ^[12]: 假设 $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ 是区间 I_j 上的空间 V_h^k 的局部基, 如果存在与 h 无关的常数 a_{il}, b_i , 且满足 $a_{ii} \neq 0$, 使得:

$$\left| v_i(x) - \sum_{l=i}^k a_{il} (x - x_j)^l \right| \leq b_i h^{k+1}, \quad \forall x \in I_j, \quad i = 0, \dots, k, \quad (2.5.1)$$

则对任意 $u(x) \in H^{k+1}(I_j)$, 存在 $v_h \in V_h^k$ 和与 h 无关的常数 C , 使得:

$$|v_h(x) - u(x)| \leq C \|u\|_{H^{k+1}(I_j)} h^{k+\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in I_j. \quad (2.5.2)$$

命题 2.5.2 ^[12]: 假设空间 V_h^k 在每个区间 $I_j \in \Omega$ 都满足命题 2.5.1 中的条件 (2.5.1), 令 P_h 是一个映射到空间 V_h^k 的 L^2 投影算子, 则对任意 $u(x) \in H^{k+1}(\Omega)$, 存在一个常数 C , 使得:

$$\|P_h u - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} h^{k+1}. \quad (2.5.3)$$

命题 2.5.3 ^[12]: 假设空间 V_h^k 在每个区间 $I_j \in \Omega$ 都满足命题 2.5.1 中的条件 (2.5.1), 令 P_h 是一个映射到空间 V_h^k 的 L^2 投影算子, 则对任意 $u(x) \in H^{k+1}(\Omega)$, 存在一

个常数 C , 使得:

$$\left| P_h u \left(x_{j+\frac{1}{2}}^\pm \right) - u \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| \leq C h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{k+1}(I_j \cup I_{j+1})}. \quad (2.5.4)$$

利用命题 2.5.1、命题 2.5.2、命题 2.5.3, 可得到如下的投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性:

定理 2.5.4 : (投影算子 $\tilde{P}_h$ 的插值不等式) 假设 $\tilde{V}_h^k$ 是分段三角基有限元空间, 其中 $\tilde{P}_h$ 为从 $p \in L^2(\Omega)$ 到 $\tilde{V}_h^k$ 的标准 L^2 投影, 且满足 (2.1.1), $\tilde{\eta}_w = \tilde{P}_h w - w$, $\tilde{\eta}_u = \tilde{P}_h u - u$, w 的定义在 (2.2.1), 则:

$$\|\tilde{\eta}_p^n\| + h \|\tilde{\eta}_p^n\|_\infty + h^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\eta}_p^n\|_{\Gamma_h} \leq C h^{k+1} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad (p = u, w), \quad (2.5.5)$$

其中 C 与 $\|p\|_{L^\infty(H^{k+1})}$ 有关, 与 n, h, τ 无关, Γ_h 表示所有单元 I_j 的边界点集

证明: 由^[12] 可知我们定义的分段三角基有限元空间 $\tilde{V}_h^k$ 在每个区间 $I_j \in \Omega$ 都满足命题 2.5.1 中的 (2.5.1), 所以 $\tilde{P}_h$ 满足命题 2.5.2 和命题 2.5.3

由定理 2.5.2, 我们知:

$$\|\tilde{\eta}_u\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \tilde{P}_h u - u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} h^{k+1}.$$

同理:

$$\|\tilde{\eta}_w\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \tilde{P}_h w - w \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|w\|_{H^{k+1}(\Omega)} h^{k+1},$$

即

$$\|\tilde{\eta}_p\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \tilde{P}_h p - p \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)} h^{k+1}, \quad (2.5.6)$$

注意 $\|v_h\|_{\Gamma_h}^2 = \sum_{j=1}^N \left| v_h \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right|^2 = \sum_{j=1}^N \left| v_h \left(x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) \right|^2$, 由命题 2.5.3, 我们知:

$$\left| \tilde{P}_h u \left(x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) - u \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| \leq C h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{k+1}(I_j \cup I_{j+1})},$$

所以:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\eta}_u\|_{\Gamma_h}^2 &= \sum_{j=1}^N \left| \eta_u \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right|^2 = \sum_{j=1}^N \left| \tilde{P}_h u \left(x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) - u \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^N C h^{2k+1} \|u\|_{H^{k+1}(I_j \cup I_{j+1})}^2 \leq \tilde{C} h^{2k+1} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

所以:

$$\|\tilde{\eta}_u\|_{\Gamma_h} \leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)},$$

同理:

$$\|\tilde{\eta}_w\|_{\Gamma_h} \leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \|w\|_{H^{k+1}(\Omega)},$$

即

$$\|\tilde{\eta}_p\|_{\Gamma_h} \leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad (p = u, w), \quad (2.5.7)$$

由 (2.5.2) 知 $|u(x) - \tilde{v}_h(x)| \leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{k+1}(I_j)}, \quad x \in I_j = \left(x_{j-\frac{1}{2}}^+, x_{j+\frac{1}{2}}^-\right),$

所以:

$$\|u - \tilde{v}_h\|_{L^\infty(I_j)} = \max_{x \in I_j} |u - \tilde{v}_h| \leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{k+1}(I_j)}, \quad (2.5.8)$$

$$\|\tilde{\eta}_u\|_{L^\infty}^2 = \left\| \tilde{P}_h u - u \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2, \quad (2.5.9)$$

因为 $\tilde{P}_h u$ 是映射到 $\tilde{V}_h^k$ 中的 L^2 正交投影, 所以:

$$\left\| \tilde{P}_h u - u \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq \|u - \tilde{v}_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2, \quad (2.5.10)$$

结合 (2.5.8)(2.5.9)(2.5.10), 当 h 充分小时, 有:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\eta}_u\|_{L^\infty}^2 &\leq \|u - \tilde{v}_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^N \|u - \tilde{v}_h\|_{L^\infty(I_j)}^2 \\ &\leq C' \sum_{j=1}^N h^{2k+1} \|u\|_{H^{k+1}(I_j)}^2 \leq Ch^{2k+1} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \leq Ch^{2k} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

所以:

$$\|\tilde{\eta}_u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)},$$

同理:

$$\|\tilde{\eta}_w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^k \|w\|_{H^{k+1}(\Omega)},$$

即

$$\|\tilde{\eta}_p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^k \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad (p = u, w), \quad (2.5.11)$$

结合 (2.5.6)(2.5.7)(2.5.11), 我们有:

$$\|\tilde{\eta}_p^n\| + h \|\tilde{\eta}_p^n\|_\infty + h^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\eta}_p^n\|_{\Gamma_h} \leq Ch^{k+1} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad (p = u, w).$$

定理 2.5.4 证毕.

推论 2.5.5 : (投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性) 假设有限元空间 $\tilde{V}_h^k$ 和投影 $\tilde{P}_h$ 与定理 2.5.4 中定义的一样, 则:

$$\|\tilde{\eta}_u^{n+1} - \tilde{\eta}_u^n\| + \|\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n\| \leq Ch^{k+1}\tau, \quad (2.5.12)$$

其中 C 只与 $\partial_t u$ 有关, 与 n, h, τ 无关.

证明: 由 (2.5.5) 知:

$$\|\tilde{\eta}_p^n\| \leq \|\tilde{\eta}_p^n\| + h \|\tilde{\eta}_p^n\|_\infty + h^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\eta}_p^n\|_{\Gamma_h} \leq Ch^{k+1}, \quad (p = u, w), \quad (2.5.13)$$

其中 C 只与 p 有关.

下证 $\|\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n\| \leq Ch^{k+1}\tau$,

$$\text{因为 } \tilde{\eta}_w^n = \tilde{P}_h w - w, \quad \tilde{\eta}_u^n = \tilde{P}_h u - u,$$

由 (2.2.1), 有:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_w^n &= \tilde{P}_h (u + \partial_t u \cdot \tau) - (u + \partial_t u \cdot \tau) = \tilde{P}_h u + \tau \cdot \tilde{P}_h \partial_t u - u - \tau \cdot \partial_t u \\ &= \tilde{\eta}_u^n + \tau \cdot (\tilde{P}_h \partial_t u - \partial_t u) = \tilde{\eta}_u^n + \tau \cdot \tilde{\eta}_{\partial_t u}^n, \end{aligned}$$

所以:

$$\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n = \tau \cdot \tilde{\eta}_{\partial_t u}^n,$$

由 (2.5.13), 有: $\|\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n\| = \tau \cdot \|\tilde{\eta}_{\partial_t u}^n\| \leq \tau \cdot Ch^{k+1}$, 其中 C 只与 $\partial_t u$ 有关, 即证

$$\|\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n\| \leq Ch^{k+1}\tau.$$

下证 $\|\tilde{\eta}_u^{n+1} - \tilde{\eta}_u^n\| \leq Ch^{n+1}\tau$:

因为 $\tilde{P}_h$ 是线性的, 所以:

$$\tilde{\eta}_u^{n+1} - \tilde{\eta}_u^n = \tilde{P}_h u^{n+1} - u^{n+1} - (\tilde{P}_h u^n - u^n) = \tilde{P}_h (u^{n+1} - u^n) - (u^{n+1} - u^n),$$

利用 (6.1.4), (6.1.5), 并结合 (1.1.1), (2.2.1), 我们有:

$$\begin{aligned}
 u(x, t^{n+1}) &= \frac{1}{2}u(x, t^n) + \frac{1}{2}u(x, t^n) - \frac{1}{2}\partial_x f(u(x, t^n))\tau - \frac{\tau}{2}\partial_x f(w(x, t^n)) + O(\tau^3) \\
 &= u(x, t^n) - \frac{\tau}{2}(\partial_x f(u(x, t^n)) + \partial_x f(w(x, t^n))) + O(\tau^3) \\
 &= u(x, t^n) + \frac{\tau}{2}(\partial_t u(x, t^n) + \partial_t w(x, t^n)) + O(\tau^3) \\
 &= u(x, t^n) + \tau \cdot \partial_t u(x, t^n) + \frac{\tau^2}{2}\partial_{tt}u(x, t^n) + O(\tau^3) \\
 &= u(x, t^n) + \tau \cdot \partial_t u(x, t^n) + O(\tau^2),
 \end{aligned}$$

所以: $u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n) = \tau \cdot \partial_t u(x, t^n) + O(\tau^2)$, 所以:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_h(u^{n+1} - u^n) - (u^{n+1} - u^n) &= \tilde{P}_h(\tau \cdot \partial_t u^n + O(\tau^2)) - (\tau \cdot \partial_t u^n + O(\tau^2)) \\
 &= \tau \cdot (\tilde{P}_h(\partial_t u^n) - \partial_t u^n) + \tilde{P}_h(O(\tau^2)) - O(\tau^2) \\
 &= \tau \cdot (\tilde{P}_h(\partial_t u^n) - \partial_t u^n) \\
 &= \tau \cdot \tilde{\eta}_{\partial_t u},
 \end{aligned}$$

所以: $\|\tilde{\eta}_u^{n+1} - \tilde{\eta}_u^n\| = \|\tilde{P}_h(u^{n+1} - u^n) - (u^{n+1} - u^n)\| = \tau \cdot \|\tilde{\eta}_{\partial_t u}\| \leq \tau \cdot Ch^{n+1}$,

即证: $\|\tilde{\eta}_u^{n+1} - \tilde{\eta}_u^n\| \leq Ch^{n+1}\tau$,

所以: $\|\tilde{\eta}_u^{n+1} - \tilde{\eta}_u^n\| + \|\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n\| \leq Ch^{k+1}\tau + C'h^{k+1}\tau \leq C''h^{k+1}\tau$.

推论2.5.5 证毕.

2.6 分段三角函数有限元空间 $\tilde{V}_h^k$ 上的逆不等式

我们所熟知的逆不等式是针对分段代数多项式有限元空间的, 对于分段三角函数有限元空间, 相应的逆不等式需要重新证明. 已知的针对分段代数多项式有限元空间 V_h^k 的逆不等式表述如下: 对任意 $v_h \in V_h^k$, 存在与 h 无关的正常数 C , 使得:

- i) $\|\partial_x v_h\|_0 \leq Ch^{-1} \|v_h\|_0$,
- ii) $\|v_h\|_{\Gamma_h} \leq Ch^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_0$,
- iii) $\|v_h\|_\infty \leq Ch^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_0$.

现在想考察, 对于分段三角函数有限元空间 $\tilde{V}_h^k$, 是否也有上述逆不等式的关系.

引理 2.6.1 : 设 $\mathcal{J}_h$ 是 Ω 的一个拟一致剖分, $\tilde{P}(T)$ 是定义在单元 $T \in \mathcal{J}_h$ 上的三角函数张成的空间, 则 $\tilde{P}(T) \subset W^{m,p}(T) = \{v \in L^p(T) : D^\alpha v \in L^p(T), |\alpha| \leq m\}$

证明: 考查 $\tilde{P}(T)$ 的所有基函数.

显然 $1 \in W^{m,p}(T)$.

对于 $\sin(nx)$, $x \in T, n = 1, 2, \dots, k$, 有:

$\|\sin(nx)\|_{L^\infty(T)} = \sup_{x \in T} |\sin(nx)| \leq 1 < +\infty$, 这里只考虑一维的情况, 即 T 是一维的有限区间, 所以:

$$\begin{aligned} \|\sin(nx)\|_{L^p(T)} &= \left(\int_T |\sin(nx)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_T (\|\sin(nx)\|_{L^\infty(T)})^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\sin(nx)\|_{L^\infty(T)} \cdot T^{\frac{1}{p}} < +\infty, \end{aligned}$$

所以: $D^\alpha(\sin(nx)) \in L^p(T)$,

所以: $\sin(nx) \in W^{m,p}(T), x \in T, n = 1, 2, \dots, k$.

同理: $\cos(nx) \in W^{m,p}(T), x \in T, n = 1, 2, \dots, k$. 所以 $\tilde{P}(T)$ 的所有基函数都含于 $W^{m,p}(T)$, 又因为 $\tilde{P}(T)$ 是一个有限维空间,

所以 $\tilde{P}(T) \in W^{m,p}(T)$.

引理2.6.1 证毕.

定理 2.6.2 : (三角基有限元空间 $\tilde{V}_h^k$ 的逆不等式) 设 $\mathcal{J}_h$ 是 Ω 的一个拟一致剖分, 并假设剖分 $\mathcal{J}_h$ 是拟正则的, $\tilde{P}(T)$ 是定义在单元 $T \in \mathcal{J}_h$ 上的三角函数张成的空间, 则有下列逆不等式成立:

$$|\tilde{p}|_{1,T} \leq \frac{C}{h_T} \|\tilde{p}\|_{0,T}, \quad \text{对任意 } \tilde{p} \in \tilde{P}(T), \quad T \in \mathcal{J}_h, \quad (2.6.1a)$$

$$\|\tilde{p}\|_{0,\infty,T} \leq Ch_T^{-\frac{n}{2}} \|\tilde{p}\|_{0,T}, \quad \text{对任意 } \tilde{p} \in P(\tilde{T}), \quad T \in \mathcal{J}_h, \quad (2.6.1b)$$

$$\|\tilde{p}\|_{\Gamma_h} \leq Ch_T^{-\frac{n}{2}} \|\tilde{p}\|_{0,T}, \quad \text{对任意 } \tilde{p} \in P(\tilde{T}), \quad T \in \mathcal{J}_h. \quad (2.6.1c)$$

其中 C 是常数, 与 p, T 无关, n 是 Ω 的维数.

证明: 令 $\hat{T}$ 是标准单元, 可逆仿射变换 $F: \hat{T} \rightarrow T, F(\hat{x}) = B\hat{x} + b = x \in T$ 则对任意 $\hat{x} \in \hat{T}$, 结合引理2.6.1, 定理2.4.2 的 (2.4.4) 式, 我们有:

$$\begin{aligned} |\tilde{p}|_{1,T} &\leq C \|B^{-1}\| \cdot (\det B)^{\frac{1}{2}} \cdot |\hat{p}|_{1,\hat{T}} \\ &\leq C \|B^{-1}\| \cdot (\det B)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\hat{p}\|_{1,\hat{T}}, \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

由于 $\|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}$ 和 $\|\hat{p}\|_{1,\hat{T}}$ 均是 $\tilde{P}(\hat{T})$ 上的范数, 而 $\tilde{P}(\hat{T})$ 是有限维空间, 因此这两个范数等价, 即

$$\|\hat{p}\|_{1,\hat{T}} \leq \hat{C} \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}, \quad (2.6.3)$$

注意到由 (2.3.1) 中关于范数和半范数的定义, 我们有: $\|v\|_{0,2,\Omega} = |v|_{0,2,\Omega}$, 简写为:

$\|v\|_{0,\Omega} = |v|_{0,\Omega}$ 由 (2.4.3) 式, 我们有:

$$\|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} = |\hat{p}|_{0,\hat{T}} = |\hat{p}|_{0,2,\hat{T}} \leq C |\det B|^{-\frac{1}{2}} |\tilde{p}|_{0,2,T} = C |\det B|^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{p}\|_{0,T}. \quad (2.6.4)$$

结合 (2.6.2)(2.6.3),(2.6.4), 引理2.6.1, (2.4.3), 并利用定理2.4.3(2.4.6) 和关于拟正则的假设 (2.4.7), 我们有:

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}\|_{1,T} &\leq C \|B^{-1}\| (\det B)^{\frac{1}{2}} \|\hat{p}\|_{1,\hat{T}} \leq C \|B^{-1}\| (\det B)^{\frac{1}{2}} \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \\ &\leq C \|B^{-1}\| (\det B)^{\frac{1}{2}} (\det B)^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{p}\|_{0,T} \leq C \rho_T^{-1} \|\tilde{p}\|_{0,T} \leq C h_T^{-1} \|\tilde{p}\|_{0,T}, \end{aligned}$$

即证 (2.6.1a).

下面给出 (2.6.1b) 的证明, 注意到由 (2.3.1) 中关于范数和半范数的定义, 结合引理2.6.1 和 (2.4.4), 我们有:

$$\|\tilde{p}\|_{0,\infty,T} \leq C \|\hat{p}\|_{0,\infty,\hat{T}}, \quad (2.6.5)$$

而在 $\tilde{P}(\hat{T})$ 上, $\|\hat{p}\|_{0,\infty,\hat{T}}$ 与 $\|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}$ 是等价范数, 从而

$$\|\hat{p}\|_{0,\infty,\hat{T}} \leq \hat{C} \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}, \quad (2.6.6)$$

结合 (2.6.5),(2.6.6), 引理2.6.1, (2.4.3), 我们有:

$$\|\tilde{p}\|_{0,\infty,T} \leq C \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \leq C |\det B|^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{p}\|_{0,T}, \quad (2.6.7)$$

再由注2.4.4(2.4.6) 和注2.4.5(2.4.8), 我们有:

$$|\det B|^{-\frac{1}{2}} \leq C [\text{mean}(T)]^{-\frac{1}{2}} \leq C h_T^{-\frac{n}{2}},$$

$$\text{所以 } \|\tilde{p}\|_{0,\infty,T} \leq C |\det B|^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{p}\|_{0,T} \leq C h_T^{-\frac{n}{2}} \|\tilde{p}\|_{0,T}, \quad (2.6.8)$$

即证 (2.6.1b).

下面给出 (2.6.1c) 的证明:

回顾我们在 2.3 节中对于 $\|v_h\|_{\Gamma_h}$ 的定义 (2.3.2), 在这里 $\|\tilde{p}\|_{\Gamma_h} = \left(\sum_{x_j \in \Gamma_h} |\tilde{p}(x_j^+)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $\tilde{p}(x_j^+)$ 会落在某个 $T \in \mathcal{T}_h$ 中.

因为在 $x \in T$ 中, $\tilde{p}(x) \leq \max_{x \in T} |\tilde{p}(x)|$, 而每一个边界点 x_j (或者说 x_j^+) 都可以

唯一对应一个单独的 T , 结合 (2.6.8), 有:

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}\|_{\mathcal{J}_h} &= \left(\sum_{x_j \in \mathcal{J}_h} |\tilde{p}(x_j^+)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{J}_h} \max_{x \in T} |\tilde{p}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{J}_h} \|\tilde{p}\|_{0,\infty,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{J}_h} C h_T^{-n} \|\tilde{p}\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq h^{-\frac{n}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{J}_h} C \|\tilde{p}\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq h^{-\frac{n}{2}} \cdot C' \cdot \|\tilde{p}\|_{0,T}, \end{aligned}$$

即证 (2.6.1c) 定理 2.6.2 证毕.

推论 2.6.3 是定理 2.6.2 的一个直接推论:

推论 2.6.3 : 对任意 $\tilde{v} \in \tilde{V}_h^k$, 存在与 v_h 和 h 无关的常数 C , 使得:

$$(i) \quad \|\partial_x \tilde{v}_h\| \leq C h^{-1} \|\tilde{v}_h\|, \quad (2.6.9a)$$

$$(ii) \quad \|\tilde{v}_h\|_{\Gamma_h} \leq C h^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{v}_h\|, \quad (2.6.9b)$$

$$(iii) \quad \|\tilde{v}_h\|_{\infty} \leq C h^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{v}_h\|. \quad (2.6.9c)$$

2.7 三角函数基 RKDG 的误差分析结论

为了方便起见, 在不至于引起混淆的情况下, 我们使用以下符号: 对任意函数 p 和一个近似解 $\tilde{q}_h^n$ ($\tilde{q}_h^n$ 可以为 $\tilde{u}_h^n$ 或 $\tilde{w}_h^n$).

$$\begin{aligned} \alpha(\hat{h}, \tilde{q}_h^n)[p]^2 &\triangleq \sum_{j=1}^N \alpha(\hat{h}, \tilde{q}_h^n)_{j+\frac{1}{2}} [p]_{j+\frac{1}{2}}^2, \\ \alpha^2(\hat{h}, \tilde{q}_h^n)[p]^2 &\triangleq \sum_{j=1}^N \alpha^2(\hat{h}, \tilde{q}_h^n)_{j+\frac{1}{2}} [p]_{j+\frac{1}{2}}^2. \end{aligned}$$

定理 2.7.1 : 记 u 是 (1.1.1) 的精确解, 且是导数有界的充分光滑函数, 假设 $f \in C^3$, 令 $\tilde{u}_h$ 是基于三角基 RKDG 格式 (2.1.5a)(2.1.5b) 的数值解, 定义相应的数值误差为 $\tilde{e}_u^n = u(t^n) - \tilde{u}_h^n$, 如果 $\tilde{V}_h^k$ 是分段高阶三角基组成的有限元空间 ($k \geq 2$), 则对足够小的 h , 存在如下误差估计:

$$\|\tilde{e}_u^n\|^2 + \sum_{0 \leq m < n} \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^m) [\tilde{e}_u^m]^2 \tau \leq C (h^{2k+2m} + \tau^4), \quad (2.7.1)$$

其中的时间步长 τ 满足 CFL 条件: $\tau \leq C_{CFL} h^{\frac{4}{3}}$, C_{CFL} 是任意给定的正常数如果 $k = 1$, 则对足够小的 h , 存在如下误差估计:

$$\|\tilde{e}_u^n\|^2 + \sum_{0 \leq m < n} \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^m) [\tilde{e}_u^m]^2 \tau \leq C(h^{2+2m}), \quad (2.7.2)$$

其中的时间步长 τ 满足 CFL 条件: $\tau \leq C_{CFL} h$, $C_{CFL} > 0$ 是一个合适的正数这里的 $\|\cdot\|$ 是 $L^2(0, 1)$ 中的范数, 正常数 C 与 n, h, τ, u_h 无关, 数值通量为迎风数值通量时, $m = 1$, 数值通量为普通的数值通量时, $m = \frac{1}{2}$.

证明: 将^[1]中涉及到针对多项式情形成立的 (3.5a-3.5d), (3.6), (3.3), (3.4) 以及针对分段代数多项式有限元空间的逆不等式替换为针对三角基情形成立的 (2.2.5a-2.2.7), (2.2.8), (2.5.5), (2.5.12) 以及针对分段三角基有限元空间的逆不等式 (推论2.6.3) 后, 该定理的证明类似于^[1]定理 3.1 的证明.

为了文章的完整性, 我们将详细步骤放在附录中.

第三章 基于三角函数基的 RKDG 解的超收敛后处理

我们先回顾在开集 $\Omega \in R^d$ 上的负阶 Sobolev 范数的定义, 我们用 $\|u\|_{0,\Omega}$ 表示 Ω 上 u 的标准 L^2 范数, 对任意自然数 l , 我们考虑 Sobolev 空间 $H^l(\Omega)$ 上的范数和半范数, 定义为:

$$\|u\|_{l,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |u|_{l,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义负阶范数为:

$$\|u\|_{-l,\Omega} = \sup_{\phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{|\int_\Omega u(x)\phi(x)dx|}{\|\phi\|_{l,\Omega}}. \quad (3.0.1)$$

类似于 Bramble 和 Schatz^[5] 所描述的后处理方法, 我们将 Mock 和 Lax^[26] 所使用的内核函数 (卷积重构 (2k) 次多项式) 应用到非多项式空间, 将三角函数基 RKDG 格式的近似解与核函数 $K_h^{2k+1,k+1} = \frac{K^{2k+1,k+1}(\frac{x}{h})}{h^d}$ 进行卷积 (d 是空间的维数), 得到精度更高的近似解.

3.1 基于三角函数基的 RKDG 近似解的负阶范数估计

我们首先给出一个结果, 它将 u 和 u 的任意近似 U 的先验估计的负范数与 u 和经过后处理的 U 的 L^2 误差联系起来. Bramble 和 Schatz 在^[11] 中给出了一个近似结果, 它表明核函数可以从负阶范数中提取隐藏的精度:

定理 3.1.1 ^[11]: 对于 $T > 0$, 令 u 是 $(I.I.I)$ 的精确解, 令 Ω_0, Ω_1 是 R^d 中的开集, 满足 $\Omega_0 + 2 \cdot \text{supp} \left(K_h^{2k+1,k+1}(x) \right) \subset \subset \Omega_1 \subset \Omega$, U 是 $L^2(\Omega_1)$ 中的一个函数, 则:

$$\left\| u - K_h^{2k+1,k+1} * U \right\|_{0,\Omega_0} \leq C_1 |u|_{2k+1,\Omega_1} h^{2k+1} + C_2 \sum_{|\alpha| \leq k+1} \|\partial_h^\alpha (u - U)\|_{-(k+1),\Omega_1}, \quad (3.1.1)$$

C_1, C_2 只与 $\Omega_0, \Omega_1, d, k, c_\gamma^{2k+1,k+1}$ 有关, 与 h 无关.

为了得到后理解的超收敛误差估计, 由定理 3.1.1 知, 我们需要估计 $\|\partial_h^\alpha (u - U)\|_{-(k+1),\Omega_1}$ 这样一个负阶范数.^{[7][27][28]} 表明在线性方程的情况下,

$\|(u - U)\|_{-(k+1), \Omega_1}$ 的分析过程可以完全应用到 $\|\partial_h^\alpha(u - U)\|_{-(k+1), \Omega_1}$. 下面我们先估计 $\|(u - U)\|_{-(k+1), \Omega_1}$ 这样一个负阶范数, 为了后续定理的证明, 我们先给出如下的引理:

引理 3.1.2 ^[4]: 考虑如下的具有周期边界条件的变系数双曲方程:

$$\varphi_t(\vec{x}, t) + \sum_{i=1}^d (a_i(\vec{x}, t)) \varphi_{x_i}(\vec{x}, t) = 0, \quad (3.1.2a)$$

$$\varphi(\vec{x}, 0) = \varphi_0(\vec{x}), \quad (3.1.2b)$$

其中 $a(\vec{x}, t)$ 是一个给定的光滑周期函数, 对任意 $l \geq 0$, 固定时间 t 和 $a(\vec{x}, t) \in L^\infty((0, T); W^{2l+1, \infty}(\Omega))$, 则 (3.1.2a) 的解满足如下性质:

$$\|\varphi(\vec{x}, t)\|_{l, \Omega} \leq C \|\varphi(\vec{x}, 0)\|_{l, \Omega}, \quad (3.1.3)$$

其中 C 是一个与 $\|a(\vec{x}, t)\|_{L^\infty((0, T); W^{2l+1, \infty}(\Omega))}$ 无关的常量.

对于三角函数基有限元空间 RKDG 解的负阶范数估计, 我们有如下结果:

定理 3.1.3 : 对于 $0 < T < T^*$, 其中 T^* 是经典解存在的最大时间,

令 $u \in L^\infty((0, T); W^{2k+2, \infty}(\Omega)) \cap L^\infty((0, T); H^{2k+2}(\Omega)) \cap L^2((0, T); W^{2k+2, \infty}(\Omega))$ 是 (1.1.1) 的精确解, 并且假设 $f \in W^{2k+2, \infty}(\Omega)$, 在光滑的初始条件和周期边界条件下, 如果 $\tilde{u}_h$ 是三角 DG 格式 (2.1.5a)(2.1.5b) 的解 (局部基的维数 $k > \frac{1}{2}$), 则:

$$\|u(T) - \tilde{u}_h(T)\|_{-(k+1), \Omega} \leq Ch^{2k+m}, \quad (3.1.4)$$

其中 C 与 $\|u_0\|_{k+1, \Omega}$, $\|f_i\|_{W^{2k+2, \infty}(\Omega)}$, T 有关, 与 h 无关, m 与定理 2.7.1 中的 m 一样, 取决于数值通量的选择, 数值通量为迎风数值通量时, $m = 1$, 数值通量为普通的单调数值通量时, $m = \frac{1}{2}$.

证明的主要思想是使用对偶论证, 当我们考虑负阶范数的定义时, 即, 对于给定的 $l > 0$, 我们希望估计:

$$\|u(T) - \tilde{u}_h(T)\|_{-l, \Omega} = \sup_{\phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{|(u(T) - \tilde{u}_h(T), \phi)_\Omega|}{\|\phi\|_{l, \Omega}},$$

因此我们需要分析 $(u(T) - \tilde{u}_h(T), \phi)_\Omega$. 针对非线性标量双曲型方程:

$$u_t + \sum_{i=1}^d (f_i(u))_{x_i} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T]. \quad (3.1.5)$$

我们遵循^[7] 和^[4] 给出的分析来估计内积 $(u(T) - \tilde{u}_h(T), \phi)_\Omega$ 我们考虑一个非线性问题的对偶方程, 这个对偶方程的定义不是唯一的 (参考^[29]), 我们选择如下形式的对偶方程:

找到一个函数 φ , 使得 $\varphi(\cdot, t)$ 对于所有 $t \in [0, 1]$ 和在空间的所有维度上都是单周期的, 且满足:

$$\varphi_t + \sum_{i=1}^d f'_i(u) \varphi_{x_i} = 0, \quad \Omega \times [0, T], \quad (3.1.6)$$

$$\varphi(x, T) = \phi(x), \quad (3.1.7)$$

将 (3.1.5) 两边同乘 φ , 将 (3.1.6) 两边同乘 u , 并在 Ω 上积分, 我们有:

$$0 = (u_t, \varphi)_\Omega + (u, \varphi_t)_\Omega + \sum_{i=1}^d (((f(u))_{x_i}, \varphi)_\Omega + (f'_i(u)u, \varphi_{x_i})_\Omega), \quad (3.1.8)$$

利用分部积分和边界条件的单周期性质, 我们有:

$$\begin{aligned} (f_i(u)_{x_i}, \varphi)_\Omega &= \int_\Omega f_i(u)_{x_i} \cdot \varphi dx = \varphi f_i(u)|_\Omega - \int_\Omega f_i(u) \varphi'_{x_i} dx \\ &= \varphi f_i(u)|_\Omega - (f_i(u), \varphi_{x_i})_\Omega = -(f_i(u), \varphi_{x_i})_\Omega, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

将 (3.1.9) 代入 (3.1.8), 我们有:

$$\frac{d}{dt}(u, \varphi)_\Omega + F(u; \varphi) = 0, \quad (3.1.10)$$

其中

$$F(u; \varphi) = \sum_{i=1}^d ((f'_i(u)u - f_i(u)), \varphi_{x_i})_\Omega, \quad (3.1.11)$$

(3.1.10) 两边对时间积分, 得到:

$$(u(T), \varphi(T))_\Omega = (u(0), \varphi(0))_\Omega - \int_0^T F(u; \varphi) dt, \quad (3.1.12)$$

上面这些关系使我们能够估计内积 $(u(T) - \tilde{u}_h(T), \phi)_\Omega$, 我们跟随^[7] 和^[4] 的思路结合 (3.1.7), (3.1.12), 我们有:

$$\begin{aligned}
 (u(T) - \tilde{u}_h(T), \phi)_\Omega &= (u(T), \phi)_\Omega - (\tilde{u}_h(T), \phi)_\Omega \\
 &= (u(T), \varphi(T))_\Omega - (\tilde{u}_h(T), \varphi(T))_\Omega \\
 &= (u(0), \varphi(0))_\Omega - \int_0^T F(u; \varphi) dt - (\tilde{u}_h(T), \varphi(T))_\Omega \\
 &= (u(0), \varphi(0))_\Omega - (\tilde{u}_h(0), \varphi(0))_\Omega - \int_0^T \frac{d}{dt} (\tilde{u}_h, \varphi)_\Omega dt - \int_0^T F(u; \varphi) dt \\
 &= (u(0) - \tilde{u}_h(0), \varphi(0))_\Omega - \int_0^T ((\tilde{u}_h)_t, \varphi)_\Omega + (\tilde{u}_h, \varphi_t)_\Omega dt - \int_0^T F(u; \varphi) dt,
 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

我们仔细考虑下 (3.1.13) 的第二项,

由^[4](2.5.2) 式:

$$((\tilde{u}_h)_t, \psi)_\Omega + B(\tilde{u}_h; \psi) = 0, \quad \forall \psi \in \tilde{V}_h^k, \tag{3.1.14}$$

我们人为引入一个函数 $\chi \in \tilde{V}_h^k$, 由 (3.1.14), 我们有:

$$\begin{aligned}
 ((\tilde{u}_h)_t, \chi)_\Omega + B(\tilde{u}_h; \chi) &= 0, \\
 \Rightarrow ((\tilde{u}_h)_t, \varphi - \chi)_\Omega + B(\tilde{u}_h; \varphi - \chi) &= 0, \\
 \Rightarrow ((\tilde{u}_h)_t, \varphi)_\Omega &= ((\tilde{u}_h)_t, \varphi - \chi)_\Omega + B(\tilde{u}_h; \varphi - \chi) - B(\tilde{u}_h; \varphi),
 \end{aligned}$$

像^[7] 中一样

$$((\tilde{u}_h)_t, \varphi)_\Omega + (\tilde{u}_h, \varphi_t)_\Omega = ((\tilde{u}_h)_t, \varphi - \chi)_\Omega + B(\tilde{u}_h; \varphi - \chi) + (\tilde{u}_h, \varphi_t)_\Omega - B(\tilde{u}_h, \varphi), \tag{3.1.15}$$

则:

$$\begin{aligned}
 (u(T) - \tilde{u}_h(T), \phi)_\Omega &= (u(0) - \tilde{u}_h(0), \varphi(0))_\Omega \\
 &\quad - \int_0^T ((\tilde{u}_h)_t, \varphi - \chi)_\Omega + B(\tilde{u}_h; \varphi - \chi) dt \\
 &\quad - \int_0^T ((\tilde{u}_h, \varphi_t)_\Omega - B(\tilde{u}_h; \varphi) + F(u; \varphi)) dt \\
 &\triangleq \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3,
 \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

其中

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= (u(0) - \tilde{u}_h(0), \varphi(0))_\Omega, \\ \Theta_2 &= - \int_0^T ((\tilde{u}_h)_t, \varphi - \chi)_\Omega + B(\tilde{u}_h; \varphi - \chi) dt, \\ \Theta_3 &= - \int_0^T ((\tilde{u}_h, \varphi_t)_\Omega - B(\tilde{u}_h; \varphi) + F(u; \varphi)) dt,\end{aligned}$$

引理 3.1.4 : 存在与 h 无关的常数 C , 使得:

$$|\Theta_1| \leq Ch^{2k+2} \|u_0\|_{k+1} \|\varphi(0)\|_{k+1}, \quad (3.1.17)$$

证明: 我们选择 $\tilde{u}_h(x, 0) = \tilde{P}_h u_0(x) \in \tilde{P}_h^k$,

因为 $\tilde{P}_h \varphi(0) \in \tilde{P}_h^k$, 利用 L^2 投影的性质 (2.1.1), 所以:

$\int_\Omega (u_0 - \tilde{P}_h u_0) \tilde{P}_h \varphi(0) dx = 0$, 则:

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= (u(0) - \tilde{u}_h(0), \varphi(0))_\Omega = (u(0) - \tilde{P}_h u_0, \varphi(0))_\Omega \\ &= (u(0) - \tilde{P}_h u_0, \varphi(0) - \tilde{P}_h \varphi(0))_\Omega,\end{aligned}$$

利用命题 2.5.2 (2.5.3) 和 *Cauchy-Schwarz* 不等式, 我们有:

$$|\Theta_1| \leq \|u_0 - \tilde{P}_h u_0\|_\Omega \|\varphi(0) - \tilde{P}_h \varphi(0)\|_\Omega \leq C_1 h^{2k+2} \|u_0\|_{k+1} \|\varphi(0)\|_{k+1}, \text{ 即证 (3.1.17).}$$

引理 3.1.5 : 存在与 h 无关的常数 C , 使得:

$$\begin{aligned}|\Theta_2| &\leq Ch^k \left(\int_0^T \|\tilde{u}_h - u\|_\Omega^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\varphi\|_{k+1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + Ch^{2k+2} \left(\int_0^T \|\varphi\|_{k+1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + Ch^{2k+1} \left(\int_0^T \|u\|_{k+1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\varphi\|_{k+1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \quad (3.1.18)$$

证明: 由 Θ_2 的定义 $\Theta_2 = - \int_0^T ((\tilde{u}_h)_t, \varphi - \chi)_\Omega + B(\tilde{u}_h; \varphi - \chi) dt$, 我们考虑 Θ_2 里的积分项, 令 $\chi = \tilde{P}_h \varphi \in \tilde{V}_h^k$, 利用 L^2 投影的性质 (2.1.1), 有:

$$((\tilde{u}_h)_t, \varphi - \tilde{P}_h \varphi)_\Omega = 0,$$

由 B 的定义, 我们有:

$$B(\tilde{u}_h, \varphi - \tilde{P}_h \varphi) = \sum_{i=1}^d \sum_K \left(- \left(f_i(\tilde{u}_h), (\varphi - \tilde{P}_h \varphi)_{x_i} \right)_K + \int_{\partial K} \hat{f}_i(\tilde{u}_h^L, \tilde{u}_h^R) v_i (\varphi - \tilde{P}_h \varphi) ds \right),$$

考虑第 i 项, 利用分部积分, 则有:

$$\begin{aligned} & \sum_K \left(- \left(f_i(\tilde{u}_h), (\varphi - \tilde{P}_h \varphi)_{x_i} \right)_K + \int_{\partial K} \hat{f}_i(\tilde{u}_h^L, \tilde{u}_h^R) v_i (\varphi - \tilde{P}_h \varphi) ds \right) \\ &= \sum_K \left(\left((f_i(\tilde{u}_h))_{x_i}, \varphi - \tilde{P}_h \varphi \right)_K - \int_{\partial K} f_i(\tilde{u}_h) v_i (\varphi - \tilde{P}_h \varphi) ds \right. \\ & \quad \left. + \int_{\partial K} \hat{f}_i(\tilde{u}_h^L, \tilde{u}_h^R) v_i (\varphi - \tilde{P}_h \varphi) ds \right), \\ &= \sum_K \int_{\partial K} (f_i(u) - f_i(\tilde{u}_h)) v_i (\varphi - \tilde{P}_h \varphi) ds + \sum_K \left((f_i(\tilde{u}_h))_{x_i}, \varphi - \tilde{P}_h \varphi \right)_K, \\ & \quad + \sum_K \int_{\partial K} (\hat{f}_i(\tilde{u}_h^L, \tilde{u}_h^R) - f_i(u)) v_i (\varphi - \tilde{P}_h \varphi) ds, \\ &= (I) + (II) + (III), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} (I) &= \sum_K \int_{\partial K} (f_i(u) - f_i(\tilde{u}_h)) v_i (\varphi - \tilde{P}_h \varphi) ds, \\ (II) &= \sum_K \left((f_i(\tilde{u}_h))_{x_i}, \varphi - \tilde{P}_h \varphi \right)_K, \\ (III) &= \sum_K \int_{\partial K} (\hat{f}_i(\tilde{u}_h^L, \tilde{u}_h^R) - f_i(u)) v_i (\varphi - \tilde{P}_h \varphi) ds, \end{aligned}$$

(I) 的估计:

利用 f_i 的 *Lipschitz* 连续性, 三角基有限元空间的逆不等式 (2.6.9a)(2.6.9b)(2.6.9c)

和投影近似属性定理2.5.4 (2.5.5), 可得:

$$\begin{aligned}
 |(I)| &\leq C \sum_K \int_{\partial K} |\tilde{u}_h - u| \cdot |\varphi - \tilde{P}_h \varphi| ds \\
 &\leq C \|\tilde{u}_h - u\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\varphi - \tilde{P}_h \varphi\|_{L^2(\Gamma)} \\
 &\leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \|\tilde{u}_h - u\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\varphi\|_{k+1} \\
 &\leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \left(\|\tilde{u}_h - \tilde{P}_h u\|_{L^2(\Gamma_h)} + \|\tilde{P}_h u - u\|_{L^2(\Gamma_h)} \right) \|\varphi\|_{k+1} \\
 &\leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \left(h^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{u}_h - \tilde{P}_h u\|_{L^2(\Omega)} + h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{k+1} \right) \|\varphi\|_{k+1} \\
 &\leq Ch^k \|\tilde{u}_h - \tilde{P}_h u\|_{\Omega} \|\varphi\|_{k+1} + Ch^{2k+1} \|u\|_{k+1} \|\varphi\|_{k+1} \\
 &\leq Ch^k \|\tilde{u}_h - u\|_{\Omega} \|\varphi\|_{k+1} + Ch^k \|u - \tilde{P}_h u\|_{\Omega} \|\varphi\|_{k+1} + Ch^{2k+1} \|u\|_{k+1} \|\varphi\|_{k+1} \\
 &\leq Ch^k \|u - \tilde{u}_h\|_{\Omega} \|\varphi\|_{k+1} + Ch^{2k+1} \|u\|_{k+1} \|\varphi\|_{k+1},
 \end{aligned}$$

(II) 的估计:

利用 L^2 投影的正交性 (2.1.1), 有:

$$\begin{aligned}
 (II) &= \sum_K \left(\left((f_i(\tilde{u}_h))_{x_i} - \tilde{P}_h((f_i(\tilde{u}_h))_{x_i}), (\varphi - \tilde{P}_h \varphi) \right)_K \right. \\
 &\quad \left. + \left(\tilde{P}_h((f_i(\tilde{u}_h))_{x_i}), (\varphi - \tilde{P}_h \varphi) \right)_K \right) \\
 &= \sum_K \left(\left((f_i(\tilde{u}_h))_{x_i} - \tilde{P}_h((f_i(\tilde{u}_h))_{x_i}), (\varphi - \tilde{P}_h \varphi) \right)_K \right),
 \end{aligned}$$

则由 Cauchy-Schwarz 不等式和定理2.5.4 (2.5.5), 我们有:

$$\begin{aligned}
 |(II)| &\leq C \left\| (f_i(\tilde{u}_h))_{x_i} - \tilde{P}_h((f_i(\tilde{u}_h))_{x_i}) \right\|_{\Omega} \|\varphi - \tilde{P}_h \varphi\|_{\Omega} \\
 &\leq Ch^{k+1} \|(f_i(\tilde{u}_h))_{x_i}\|_{k+1} \cdot Ch^{k+1} \|\varphi\|_{k+1} \\
 &\leq Ch^{2k+2} \|\varphi\|_{k+1},
 \end{aligned}$$

(III) 的估计:

结合数值通量 $\hat{f}_i$ 的 Lipschitz 连续性, 三角基有限元空间的逆不等式 (2.6.9a)(2.6.9b)(2.6.9c)

和投影近似属性定理2.5.4 (2.5.5), 可得:

$$\begin{aligned}
 |(III)| &\leq C \sum_K \int_{\partial K} |\tilde{u}_h - u| \cdot |\varphi - \tilde{P}_h \varphi| ds \\
 &\leq C \|\tilde{u}_h - u\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\varphi - \tilde{P}_h \varphi\|_{L^2(\Gamma)} \\
 &\leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \|\tilde{u}_h - u\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\varphi\|_{k+1} \\
 &\leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \left(\|\tilde{u}_h - \tilde{P}_h u\|_{L^2(\Gamma_h)} + \|\tilde{P}_h u - u\|_{L^2(\Gamma_h)} \right) \|\varphi\|_{k+1} \\
 &\leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \left(h^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{u}_h - \tilde{P}_h u\|_{L^2(\Omega)} + h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{k+1} \right) \|\varphi\|_{k+1} \\
 &\leq Ch^k \|\tilde{u}_h - \tilde{P}_h u\|_{\Omega} \|\varphi\|_{k+1} + Ch^{2k+1} \|u\|_{k+1} \|\varphi\|_{k+1} \\
 &\leq Ch^k \|\tilde{u}_h - u\|_{\Omega} \|\varphi\|_{k+1} + Ch^k \|u - \tilde{P}_h u\|_{\Omega} \|\varphi\|_{k+1} + Ch^{2k+1} \|u\|_{k+1} \|\varphi\|_{k+1} \\
 &\leq Ch^k \|u - \tilde{u}_h\|_{\Omega} \|\varphi\|_{k+1} + Ch^{2k+1} \|u\|_{k+1} \|\varphi\|_{k+1},
 \end{aligned}$$

所以:

$$\begin{aligned}
 |\Theta_2| &\leq C \int_0^T \sum_{i=1}^d (I + II + III) dt \\
 &\leq Ch^k \left(\int_0^T \|\tilde{u}_h - u\|_{\Omega}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\varphi\|_{k+1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + Ch^{2k+2} \left(\int_0^T \|\varphi\|_{k+1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + Ch^{2k+1} \left(\int_0^T \|u\|_{k+1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\varphi\|_{k+1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

即证 (3.1.18).

引理 3.1.6 : 存在与 h 无关的常数 C , 使得:

$$|\Theta_3| \leq C \int_0^T \|\tilde{u}_h - u\|_{\Omega}^2 \|\varphi\|_{k+1} dt, \quad (3.1.19)$$

证明: 记 Θ_3 的积分项为 (IV) , 即 $(IV) = (u_h, \varphi_t)_{\Omega} - B(u_h; \varphi) + F(u; \varphi)$ 结合对

偶方程 (3.1.6) 和 B, F 的定义, 并利用 φ 的连续性和周期边界条件, 可得:

$$\begin{aligned}
 (IV) &= - \left(\tilde{u}_h, \sum_{i=1}^d f'_i(u) \varphi_{x_i} \right)_{\Omega} - B(\tilde{u}_h; \varphi) + F(u; \varphi) \\
 &= \sum_{i=1}^d (- (\tilde{u}_h f'_i(u), \varphi_{x_i})_{\Omega} + (f_i(\tilde{u}_h), \varphi_{x_i})_{\Omega} + ((f'_i(u)u - f_i(u)), \varphi_{x_i})_{\Omega} \\
 &\quad - \sum_K \int_{\partial K} \hat{f}_i(u_h^L, u_h^R) v_i \varphi ds) \\
 &= \sum_{i=1}^d ((f_i(\tilde{u}_h) - f_i(u) - f'_i(u)(\tilde{u}_h - u), \varphi_{x_i})_{\Omega}),
 \end{aligned}$$

由 *Taylor* 展开: $f_i(\tilde{u}_h) = f_i(u) + f'_i(u)(\tilde{u}_h - u) + \frac{f''_i(\xi_i)}{2}(\tilde{u}_h - u)^2$, 其中 ξ_i 介于 $\tilde{u}_h$ 和 u 之间, 则:

$$\begin{aligned}
 |(IV)| &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (f''_i(\xi_i)(\tilde{u}_h - u)^2, \varphi_{x_i})_{\Omega} | \\
 &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sup(|f''_i|) \|\varphi_{x_i}\|_{L^\infty} \|u - \tilde{u}_h\|_{\Omega}^2,
 \end{aligned}$$

由 *Sobolev* 不等式^[30]: $\|\varphi_x\|_{L^\infty} \leq C\|\varphi\|_{k+1}$.

$$\text{所以 } |(IV)| \leq C \|u - \tilde{u}_h\|_{\Omega}^2 \|\varphi\|_{k+1},$$

$$\text{所以 } |\Theta_3| \leq C \int_0^T \|\tilde{u}_h - u\|_{\Omega}^2 \|\varphi\|_{k+1} dt,$$

即证 (3.1.19).

结合 (3.1.16)(3.1.17)(3.1.18)(3.1.19), 我们有:

$$\begin{aligned}
 |(u(T) - \tilde{u}_h(T), \phi)_{\Omega}| &= |\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3| \\
 &\leq Ch^{2k+2} \|u_0\|_{k+1} \|\varphi(0)\|_{k+1, \Omega} + C \int_0^T \|\tilde{u}_h - u\|_{\Omega}^2 \|\varphi\|_{k+1, \Omega} dt \\
 &\quad + Ch^k \left(\int_0^T \|\tilde{u}_h - u\|_{\Omega}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\varphi\|_{k+1, \Omega}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + Ch^{2k+2} \left(\int_0^T \|\varphi\|_{k+1, \Omega}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + Ch^{2k+1} \left(\int_0^T \|u\|_{k+1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\varphi\|_{k+1, \Omega}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

令 $t' = T - t$, 很容易将最终时间对偶问题 (3.1.5)(3.1.6) 转化成一个初始问

题, 接着在引理3.1.2 中令 $a_i(x, t) = f_i, l = k + 1$, 则由引理3.1.2, 我们有:

$$\|\varphi\|_{k+1} \leq C\|\varphi(T)\|_{k+1} = C\|\phi\|_{k+1,\Omega}.$$

所以 $|(u(T) - \tilde{u}_h(T), \phi)_\Omega| = |\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3|$

$$\begin{aligned} &\leq Ch^{2k+2} \|u_0\|_{k+1} \|\phi\|_{k+1,\Omega} + C \int_0^T \|\tilde{u}_h - u\|_\Omega^2 \|\phi\|_{k+1,\Omega} dt \\ &+ Ch^k \left(\int_0^T \|\tilde{u}_h - u\|_\Omega^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\phi\|_{k+1,\Omega}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + Ch^{2k+2} \left(\int_0^T \|\phi\|_{k+1,\Omega}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ Ch^{2k+1} \left(\int_0^T \|u\|_{k+1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\phi\|_{k+1,\Omega}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

由定理2.7.1 知: $\|\tilde{u}_h - u\|_\Omega \leq Ch^{2k+2m}$, 其中 $m = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{普通单调数值通量.} \\ 1, & \text{迎风数值通量.} \end{cases}$

所以:

$$|(u(T) - \tilde{u}_h(T), \phi)_\Omega| \leq Ch^s \|\phi\|_{k+1,\Omega}.$$

其中 $s = \min(2k + 2, 2k + 1, 2k + m, 2k + 2m) = 2k + m$.

由负阶范数的定义:

$$\begin{aligned} \|u(T) - \tilde{u}_h(T)\|_{-l,\Omega} &= \sup_{\phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{(u(T) - \tilde{u}_h(T), \phi)_\Omega}{\|\phi\|_{l,\Omega}} \\ &\leq \sup_{\phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{Ch^s \|\phi\|_{k+1,\Omega}}{\|\phi\|_{k+1,\Omega}} \\ &\leq Ch^{2k+m}. \end{aligned}$$

3.2 基于三角函数基的 SIAC 后处理的超收敛误差估计

正如^{[7][27][28]}中提到的, 因为我们处理的是一个线性方程, 所以对于误差的分差 $\|\partial_h^\alpha(u(T) - \tilde{u}_h(T))\|_{-(k+1),\Omega}$, 可以用相同的步骤推导出来, 即:

$$\|\partial_h^\alpha(u(T) - \tilde{u}_h(T))\|_{-(k+1)\Omega} \leq Ch^{2k+m}, \quad (3.2.1)$$

推论 3.2.1 : $K_h^{2k+1,k+1}$ 和定理 3.1.1 中的定义一致, 则有:

$$\left\| u - K_h^{2k+1,k+1} * \tilde{u}_h \right\|_{0,\Omega_0} \leq Ch^{2k+m}, \quad (3.2.2)$$

其中, $\tilde{u}_h \in \tilde{V}_h^k, k$ 是 DG 方法中局部基组成的空间的维数, m 与定理 2.7.1 中的 m

一样, 取决于数值通量的选择, 数值通量为迎风数值通量时, $m = 1$, 数值通量为普通单调的数值通量时, $m = \frac{1}{2}$.

证明: 由定理3.1.1 (3.1.1), 结合定理3.1.3 知:

$$\begin{aligned} \left\| u - \tilde{K}_h^{2k+1,k+1} * U \right\|_{0,\Omega_0} &\leq C_1 \|u\|_{H^{2k+1}(I)} h^{2k+1} + C_2 \sum_{|\alpha| \leq k+1} \|\partial_h^\alpha (u - U)\|_{-(k+1),\Omega_1} \\ &\leq C_1 \|u\|_{H^{2k+1}(I)} h^{2k+1} + C_2 C_3 h^s \\ &\leq Ch^\mu, \end{aligned}$$

其中 $\mu = \min(v, s)$, $s = 2k + m$, k 是 DG 方法中局部基组成的空间的维数, m 与定理2.7.1中的 m 一样, 取决于数值通量的选择, 数值通量为迎风数值通量时, $m = 1$, 数值通量为普通的数值通量时, $m = \frac{1}{2}$.

推论3.2.1 证毕.

3.3 高效进行后处理

为了进一步提高计算效率, 本文中实现的后处理器的详细信息见 [9][7][8][31][32], 后处理只在最后的时间 T 时执行, 由 1.4 节的介绍, SIAC 后处理的解可表述成如下形式:

$$u^*(x) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} K^{2k+1,k+1} \left(\frac{y-x}{h} \right) u_h(y, T) dy, \quad (3.3.1)$$

其中 $K^{2k+1,k+1}$ 是卷积核, $u_h(y, T)$ 是最后一个时间 T 给出的 DG 解. 需要强调的是, 统一网格假设给了内核一个特别简单的形式, 允许后处理器的平移不变性. 内核还只使用来自其最近的元素邻居的信息. 这个内核可以为非均匀网格假设重新评估, 但随后实现后处理器的计算复杂度将会增加. 例如, 在均匀网格假设下, 通过一个小矩阵向量乘法就可以得到 $u_h^*(x)$:

$$u_h^*(x) = \sum_{m=-k'}^{k'} \sum_{l=0}^k u_{j+m}^{(l)}(T) C(m, l, k, x), \quad (3.3.2)$$

其中 $x \in I_j$, $k = \lceil (3k+1)/2 \rceil$. 注意到 $u_{j+m}^{(l)}(T)$ 是最后时刻的 DG 解的系数. 后处理矩阵 $C(m, l, k, x)$ 是一个次为 $2k+1$ 的多项式, 表达式如下:

$$C(m, l, k, x) = \frac{1}{h} \sum_{\gamma=-k}^k c_\gamma^{2k+1,k+1} \int_{I_{j+m}} \psi^{(k+1)} \left(\frac{y-x}{h} - \gamma \right) \varphi_{j+m}^{(l)}(y) dy, \quad (3.3.3)$$

其中, $\varphi_{j+m}^{(l)}$ 是 V_h 的基函数. 如前所述, 我们可以选择在一个特定点上评估后处理解, 如高斯-勒让德点. 而且, 对于每个元素的后处理矩阵值 $C(m, l, k, x)$ 都是相同的, 只需要计算一次. 这种后处理操作的时间复杂度为 $O(N)^{[9]}$.

第四章 数值实验

在这一章中, 我们用数值结果验证我们的理论结果, 以证明基于三角基近似空间的 DG 方法得出的数值解经过 SIAC 后处理后, 也能有超收敛的效果. 我们考虑三角基次数为 k 的 DG 方法, 并用 3 阶 Runge-Kutta 方法在时间上进行离散, 注意在时间离散化时, 要保证时间层离散的精度与空间层离散的精度相当^{[33][34]}. 我们计算了一维线性双曲方程和一维 Burgers 方程, 在三角基近似空间中的 DG 解经过 SIAC 后处理后的误差和误差阶, 并绘制出各情况下的绝对值误差在对数尺度下的图像. 我们在所有的实验中展示了 L^2, L^∞ 误差 L^2 误差的计算使用 6 个 Gauss 点的求积规则, L^∞ 误差的计算使用对所有区间在每个区间中相同的 6 个 Gauss 点.

例 4.1 在定义域 $\Omega = [0, 1]$ 上具有光滑解的线性标量对流方程:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x) \end{cases}$$

具有周期边界条件, 误差是在 $t = 1$ 时计算的, 即一个周期的时间. 在表 4.1 中, 我们展示了这个问题的数值误差, 我们可以清楚地看到, 不论是多项式近似空间还是三角基近似空间, 当这两个空间的维数相同时, 经过 SIAC 后处理的 DG 解具有相同的 $2k + 1$ 的超收敛阶.

N	SIAC 后处理前				SIAC 后处理后			
	L^2 误差	L^2 阶	L^∞ 误差	L^∞ 阶	L^2 误差	L^2 阶	L^∞ 误差	L^∞ 阶
多项式近似空间 P^1								
10	2.30E-2	-	4.18E-2	-	1.74E-2	-	2.46E-2	-
20	4.97E-3	2.20	1.31E-2	1.67	2.17E-3	3.00	3.09E-3	2.99
40	1.20E-3	2.05	3.71E-3	1.82	2.69E-4	3.01	3.81E-4	3.01
80	2.99E-4	2.00	9.79E-4	1.92	3.34E-5	3.01	4.72E-5	3.01
160	7.51E-5	1.99	2.51E-4	1.96	4.16E-6	3.00	5.89E-6	3.00
三角基近似空间 $\tilde{P}^1$								
10	2.28E-2	-	4.22E-2	-	1.73E-2	-	2.41E-2	-
20	4.69E-3	2.28	1.31E-2	1.68	2.16E-3	2.99	3.05E-3	2.97
40	1.09E-3	2.10	3.71E-3	1.82	2.69E-4	3.01	3.80E-4	3.00
80	2.67E-4	2.02	9.79E-4	1.92	3.34E-5	3.00	4.72E-5	3.00
160	6.65E-5	2.00	2.51E-4	1.96	4.16E-6	3.00	5.89E-6	3.00
多项式近似空间 P^2								
10	1.07E-3	-	3.94E-3	-	1.97E-4	-	2.79E-4	-
20	1.35E-4	2.99	5.11E-4	2.94	4.21E-6	5.54	5.97E-6	5.54
40	1.68E-5	2.99	6.44E-5	2.98	9.78E-8	5.43	1.38E-7	5.43
80	2.11E-6	2.99	8.07E-6	2.99	2.51E-9	5.28	3.55E-9	5.28
160	2.63E-7	3.00	1.00E-6	2.99	7.07E-11	5.14	1.00E-10	5.14
三角基近似空间 $\tilde{P}^2$								
10	1.05E-3	-	3.84E-3	-	1.94E-4	-	2.75E-4	-
20	1.31E-4	2.99	4.98E-4	2.94	4.12E-6	5.55	5.84E-6	5.55
40	1.64E-5	2.99	6.28E-5	2.98	9.48E-8	5.44	1.34E-7	5.44
80	2.05E-6	2.99	7.86E-6	2.99	2.41E-9	5.29	3.43E-9	5.29
160	2.57E-7	3.00	9.83E-7	2.99	6.79E-11	5.15	1.14E-10	4.90

Table 4.1: $u_t + u_x = 0$ 在两种不同的近似空间下的 L^2, L^∞ 误差及误差阶, N 个均匀区间

在图 4.1-图 4.4 中, 我们用 10、20、40、80 和 160 个区间分别绘制了 $P^1, \tilde{P}^1, P^2, \tilde{P}^2$ 经过 SIAC 后处理前 (左) 和经过 SIAC 后处理后 (右) 的数值解的绝对值误差在对数尺度下的图像. 我们可以清楚地看到, 基于三角基近似空间和基于多项式近似空间一样, 经过后处理的误差都具有更少的振荡和更高的收敛阶.

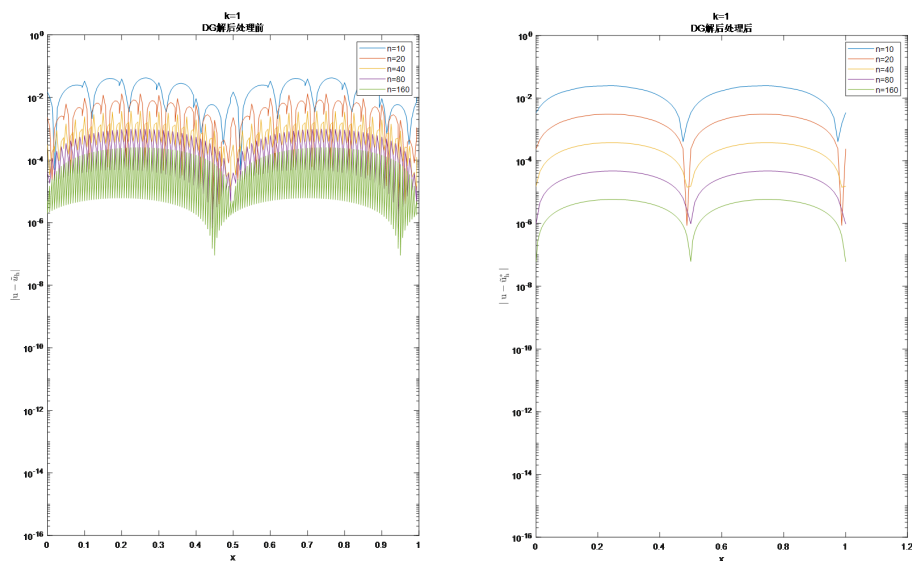


Figure 4.1: 多项式近似空间 P^1 在 10、20、40、80 和 160 个区间的 DG 解经过 SIAC 后处理前（左）和经过 SIAC 后处理后（右）的数值解的绝对值误差在对数尺度下的图像

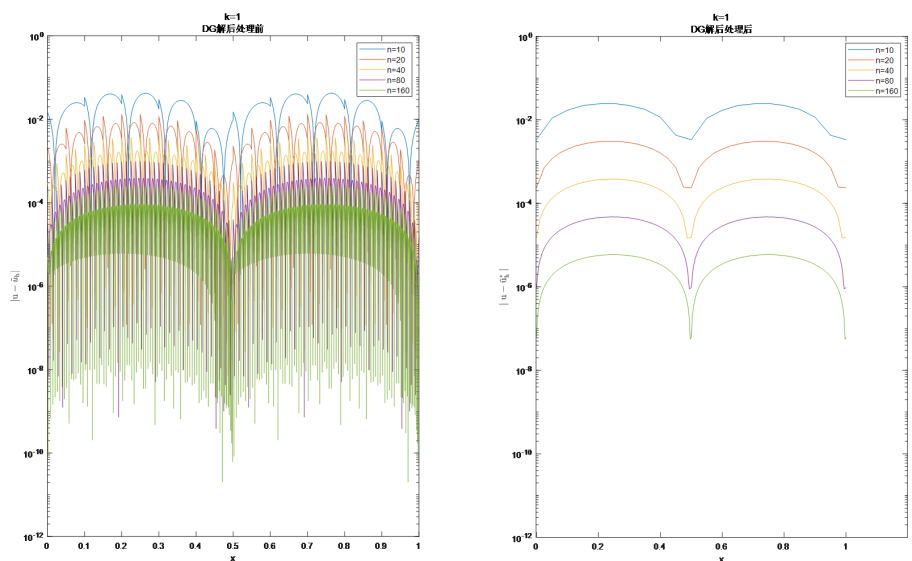


Figure 4.2: 三角基近似空间 $\tilde{P}^1$ 在 10、20、40、80 和 160 个区间的 DG 解经过 SIAC 后处理前（左）和经过 SIAC 后处理后（右）的数值解的绝对值误差在对数尺度下的图像

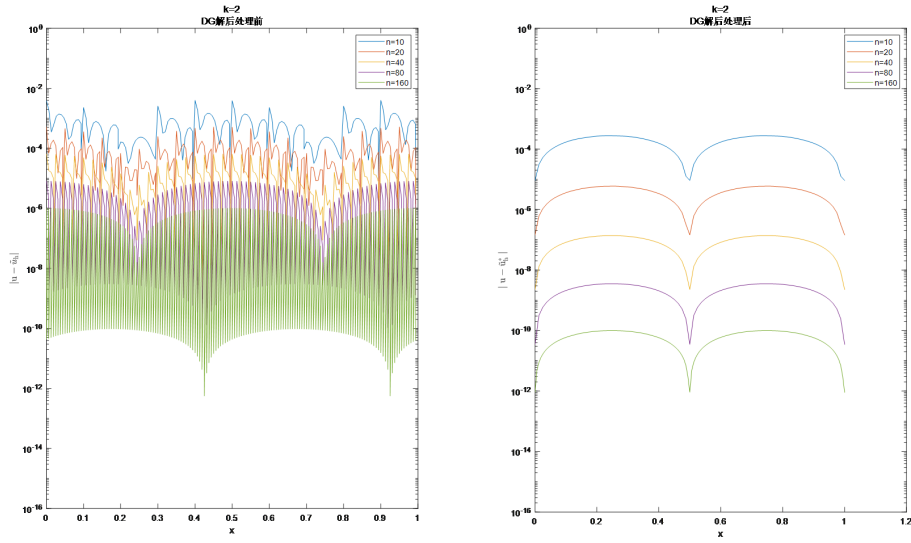


Figure 4.3: 多项式近似空间 P^2 在 10、20、40、80 和 160 个区间的 DG 解经过 SIAC 后处理前（左）和经过 SIAC 后处理后（右）的数值解的绝对值误差在对数尺度下的图像

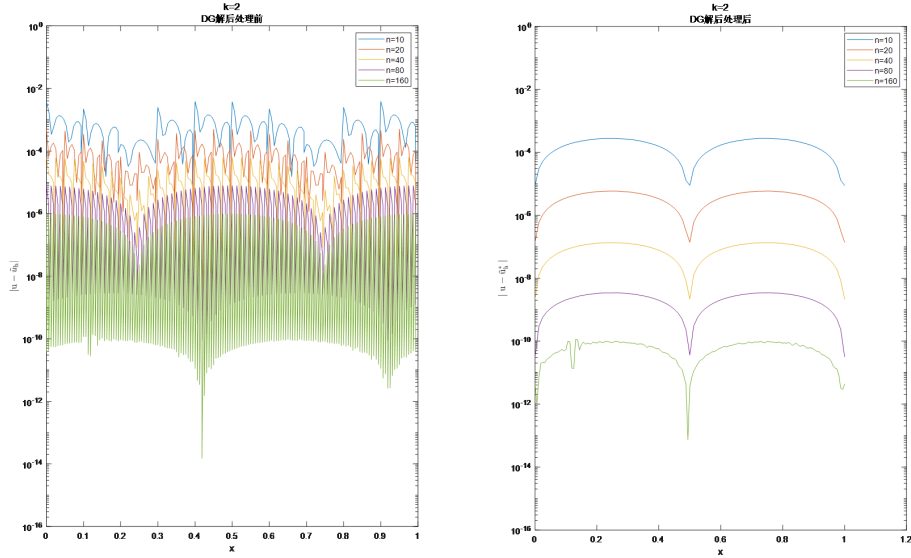


Figure 4.4: 三角基近似空间 $\tilde{P}^2$ 在 10、20、40、80 和 160 个区间的 DG 解经过 SIAC 后处理前（左）和经过 SIAC 后处理后（右）的数值解的绝对值误差在对数尺度下的图像

例 4.2 在定义域 $\Omega = [0, 1]$ 上具有光滑解的 *Burgers* 方程:

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x) \end{cases}, x \in \Omega$$

具有周期边界条件, 误差是在 $t = 0.05$ 时计算的, 此时的解仍然是光滑的. 在表 4.2 中, 我们展示了这个问题的数值误差, 我们可以清楚地看到, 经过 SIAC 后处理的 DG 解, 不论是多项式近似空间还是三角基近似空间, 当这两个空间的维数相同时, 具有相同的超收敛阶.

N	SIAC 后处理前				SIAC 后处理后			
	L^2 误差	L^2 阶	L^∞ 误差	L^∞ 阶	L^2 误差	L^2 阶	L^∞ 误差	L^∞ 阶
多项式近似空间 P^1								
10	2.09E-2	-	7.04E-2	-	4.70E-3	-	1.18E-2	-
20	5.05E-3	2.05	1.91E-2	1.87	3.57E-4	3.71	7.57E-4	3.96
40	1.28E-3	1.97	5.20E-3	1.88	3.10E-5	3.52	6.44E-5	3.55
80	3.25E-4	1.98	1.34E-3	1.95	3.90E-6	2.98	8.52E-6	2.91
160	8.17E-5	1.99	3.42E-4	1.97	5.33E-7	2.87	1.10E-6	2.95
三角基近似空间 $\tilde{P}^1$								
10	2.09E-2	-	7.04E-2	-	4.70E-3	-	1.18E-2	-
20	5.05E-3	2.05	1.91E-2	1.87	3.57E-4	3.71	7.57E-4	3.96
40	1.28E-3	1.97	5.20E-3	1.88	3.10E-5	3.52	6.44E-5	3.55
80	3.25E-4	1.98	1.34E-3	1.95	3.90E-6	2.98	8.52E-6	2.91
160	8.17E-5	1.99	3.42E-4	1.97	5.33E-7	2.87	1.10E-6	2.95
多项式近似空间 P^2								
10	1.60E-3	-	6.71E-3	-	2.98E-3	-	8.07E-3	-
20	2.47E-4	2.69	1.19E-3	2.49	1.21E-4	4.61	3.69E-4	4.44
40	3.69E-5	2.74	2.08E-4	2.51	2.69E-6	5.49	8.84E-6	5.38
80	5.69E-6	2.69	3.69E-5	2.50	4.52E-8	5.89	1.57E-7	5.81
160	8.97E-7	2.66	6.57E-6	2.48	1.19E-9	5.23	4.31E-9	5.19
三角基近似空间 $\tilde{P}^2$								
10	1.58E-3	-	6.62E-3	-	2.98E-3	-	8.07E-3	-
20	2.44E-4	2.69	1.18E-3	2.48	1.21E-4	4.61	3.69E-4	4.44
40	3.64E-5	2.74	2.06E-4	2.51	2.69E-6	5.49	8.85E-6	5.38
80	5.61E-6	2.69	3.64E-5	2.49	4.52E-8	5.89	1.57E-7	5.81
160	8.84E-7	2.66	6.50E-6	2.48	1.18E-9	5.25	4.28E-9	5.19

Table 4.2: $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$ 在两种不同的近似空间下的 L^2, L^∞ 误差, N 个均匀区间

在图 4.5-图 4.8 中, 我们用 10、20、40、80 和 160 个区间分别绘制了 $P^1, \tilde{P}^1, P^2, \tilde{P}^2$ 经过 SIAC 后处理前 (左) 和经过 SIAC 后处理后 (右) 的数值解的绝对值误差在对数尺度下的图像. 我们可以清楚地看到, 基于三角基近似空间和基于多项式近

似空间一样, 经过后处理的误差都具有更少的振荡和更高的收敛阶.

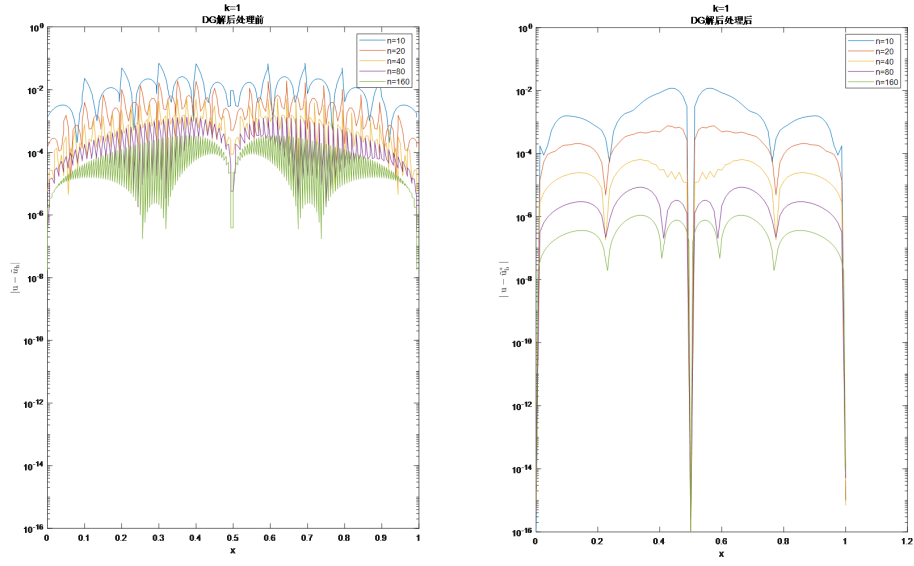


Figure 4.5: 多项式近似空间 P^1 在 10、20、40、80 和 160 个区间的 DG 解经过 SIAC 后处理前 (左) 和经过 SIAC 后处理后 (右) 的数值解的绝对值误差在对数尺度下的图像

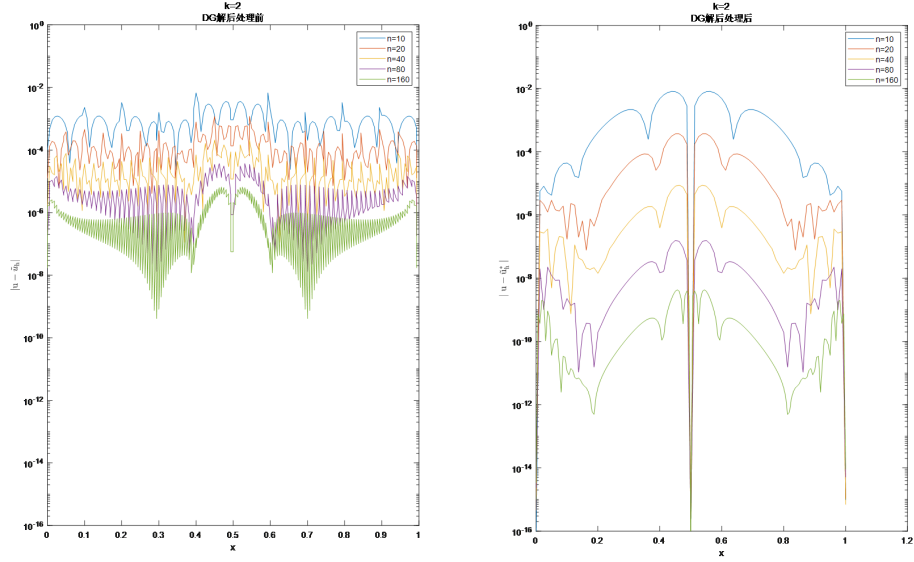


Figure 4.6: 多项式近似空间 P^2 在 10、20、40、80 和 160 个区间的 DG 解经过 SIAC 后处理前 (左) 和经过 SIAC 后处理后 (右) 的数值解的绝对值误差在对数尺度下的图像

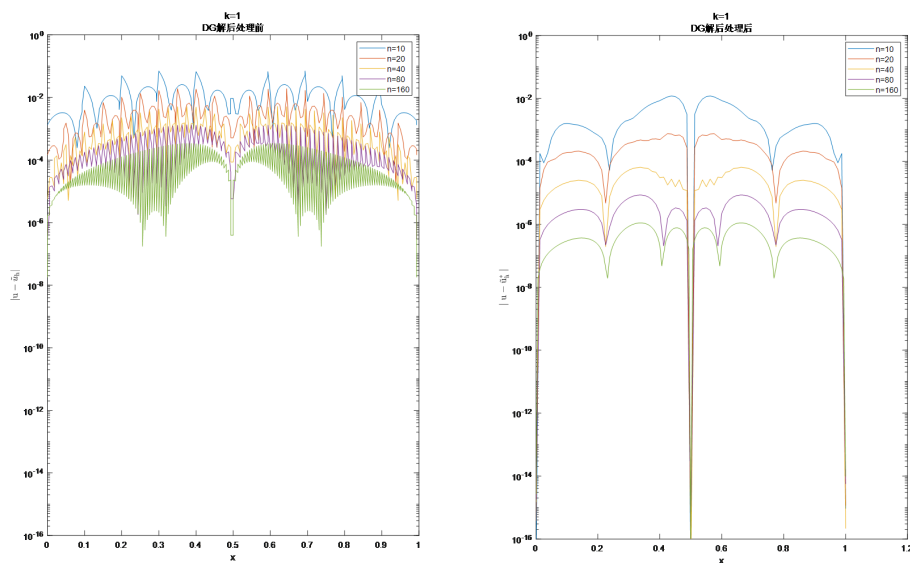


Figure 4.7: 三角基近似空间 $\tilde{P}^1$ 在 10、20、40、80 和 160 个区间的 DG 解经过 SIAC 后处理前（左）和经过 SIAC 后处理后（右）的数值解的绝对值误差在对数尺度下的图像

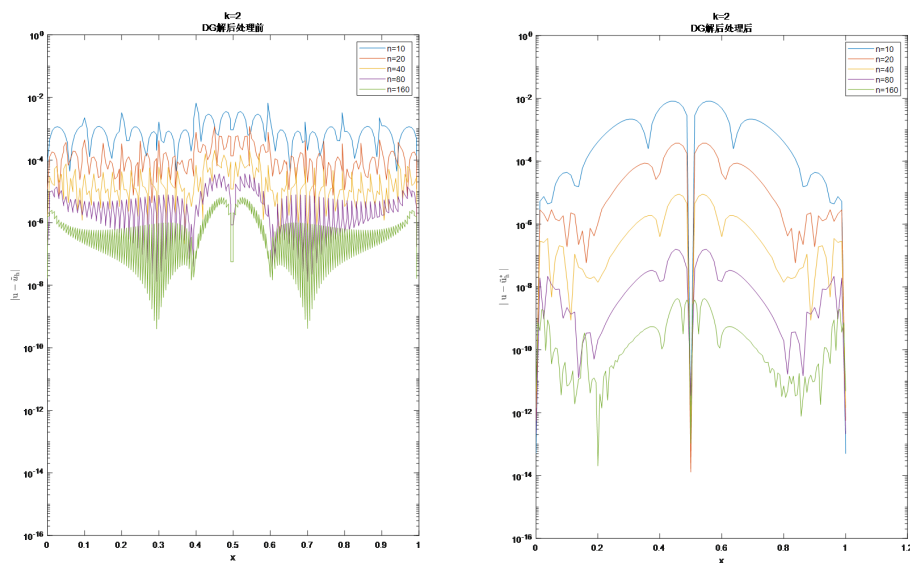


Figure 4.8: 三角基近似空间 $\tilde{P}^2$ 在 10、20、40、80 和 160 个区间的 DG 解经过 SIAC 后处理前（左）和经过 SIAC 后处理后（右）的数值解的绝对值误差在对数尺度下的图像

第五章 总结与展望

本文主要研究了一维线性守恒律方程在基于三角函数基 RKDG 方法的全离散误差估计和负阶范数误差估计, 从理论上证明了三角函数基 RKDG 方法经过 SIAC 后处理的解具有超收敛的结果, 并用数值实验加以佐证.

通过验证三角函数基有限元空间满足若干性质, 进而推导出其具有与多项式类似的插值不等式和逆不等式, 得到了基于三角函数基 RKDG 方法的全离散误差估计. 通过一个对偶转化, 将初始问题转化为一个最终时间对偶问题, 得到了基于三角函数基 RKDG 方法的负阶范数误差估计.

最后, 数值实验表明我们的三角函数基 RKDG 方法确实具有超收敛的精度.

尽管本文在三角函数基的 RKDG 方法上取得了一定的研究进展, 但仍有许多相关研究工作可以深入, 未来可探究的主要问题如下:

- 1、本文只研究了三角函数基, 相关的结论理应可以推广到其他的非多项式基 (如指数函数基) 上.
- 2、本文的时间离散采用的是二阶 RK, 相关的结论理应可以推广到三阶 RK 上, 只不过更加繁琐.
- 3、本文只考虑了一维空间层离散, 对于高维的情形, 相关的结论是否仍成立还需要继续探究.
- 4、本文只完成了线性守恒律方程的负阶范数估计, 本文中的数值实验表明非线性的 Burgers 方程也具有超收敛的性质, 关于非线性守恒律方程的负阶范数估计则有待探究.

第六章 附录

6.1 引理2.2.1的证明

在时间层 Taylor 展开:

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + u_t(x, t)\tau + \frac{u_{tt}(x, t)}{2}\tau^2 + O(\tau^3)$$

$$\text{因为 } u_t(x, t + \tau) = u_t(x, t) + u_{tt}(x, t)\tau + O(\tau^2)$$

$$\text{所以 } u_t(x, t) = u_t(x, t + \tau) - u_{tt}(x, t)\tau + O(\tau^2)$$

$$\begin{aligned} u(x, t + \tau) - u(x, t) - u_t(x, t) \cdot \frac{\tau}{2} &= u_t(x, t) \cdot \frac{\tau}{2} + \frac{u_{tt}(x, t)}{2}\tau^2 + O(\tau^3) \\ &= (u_t(x, t + \tau) - u_{tt}(x, t) \cdot \tau + O(\tau^2)) \cdot \frac{\tau}{2} + \frac{u_{tt}(x, t)}{2}\tau^2 + O(\tau^3) \\ &= u_t(x, t + \tau) \cdot \frac{\tau}{2} + O(\tau^3), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } u(x, t + \tau) - u(x, t) - u_t(x, t) \cdot \frac{\tau}{2} - u_t(x, t + \tau) \cdot \frac{\tau}{2} = O(\tau^3), \quad (6.1.1)$$

结合 (1.1.1) 和 Taylor 展开, 可知:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t + \tau) &= -\partial_x f(u(x, t + \tau)) = -\partial_x f(u(x, t) + \partial_t u(x, t)\tau + O(\tau^2)) \\ &= (u(x, t) + \partial_t u(x, t)\tau + O(\tau^2))_t = (u(x, t) + \partial_t u(x, t)\tau)_t + (O(\tau^2))_t, \end{aligned}$$

$$\text{注意到: } (O(\tau^2))_t = \left(\frac{\partial_{tt} u(x, t)}{2} \tau^2 + \dots \right)_t = \frac{\partial_{ttt} u(x, t)}{2} \tau^2 + \dots = O(\tau^2).$$

结合 (1.1.1)(2.2.1), 有:

$$u_t(x, t + \tau) = -\partial_x f(w(x, t)) + O(\tau^2), \quad (6.1.2)$$

将 (6.1.2) 代入 (6.1.1), 得:

$$u(x, t + \tau) = \frac{1}{2}u(x, t) + \frac{1}{2}w(x, t) - \partial_x f(w(x, t))\frac{\tau}{2} + O(\tau^3), \quad (6.1.3)$$

由 (2.2.1) 和 (1.1.1) 得:

$$w(x, t^n) = u(x, t^n) - \partial_x f(u(x, t^n)) \tau, \quad (6.1.4)$$

由 (6.1.3) 得:

$$u(x, t^{n+1}) = \frac{1}{2}u(x, t^n) + \frac{1}{2}w(x, t^n) - \partial_x f(w(x, t^n)) \frac{\tau}{2} + O(\tau^3), \quad (6.1.5)$$

(6.1.4) 两边乘 $v(x)$ 并在 I_j 上积分, 结合相容性, 和 u 的光滑性 $u(x_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm, t^n) = u(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t^n)$ 并利用分部积分, 得:

$$\begin{aligned} & \int_{I_j} w(x, t^n) v(x) dx \\ &= \int_{I_j} u(x, t^n) v(x) dx + \int_{I_j} f(u(x, t^n) \tau) \cdot v'(x) dx - v(x_{j+\frac{1}{2}}^-) f(u(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t^n) \tau) \\ & \quad + v(x_{j-\frac{1}{2}}^+) f(u(x_{j-\frac{1}{2}}^+, t^n) \tau) \\ &= \int_{I_j} u(x, t^n) v(x) dx + \tau \cdot H_j(u(x, t^n), v(x)), \end{aligned}$$

即证 (2.2.2a)

同样的步骤, 在 (6.1.5) 两边同乘 $v(x)$ 并在 I_j 上积分, 结合相容性, 和 w 的光滑性 $w(x_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm, t^n) = w(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t^n)$ 并利用分部积分, 得:

$$\begin{aligned} & \int_{I_j} u(x, t^{n+1}) \cdot v(x) dx \\ &= \int_{I_j} \left(\frac{1}{2}u(x, t^n) + \frac{1}{2}w(x, t^n) - \partial_x f(w(x, t^n)) \frac{\tau}{2} + O(\tau^3) \right) v(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{I_j} u(x, t^n) v(x) dx + \frac{1}{2} \int_{I_j} w(x, t^n) v(x) dx \\ & \quad - \frac{\tau}{2} \cdot H_j(w(x, t^n), v(x)) + \int_{I_j} E(x; n) v(x) dx, \end{aligned}$$

即证 (2.2.2b).

引理2.2.1 证毕.

6.2 定理2.7.1的证明

我们分 (1)(2) 两部分来证明, 在第 (1) 部分 (6.2-6.2 节) 我们证明普通单调数值通量的情况, 在第 (2) 部分 (6.2 节) 我们证明迎风数值通量的情况. 普通单调数值通量的情况的证明分为三部分: 在 6.2 节, 我们分析来自时间离散的误差, 并得到一个误差估计的关键不等式. 在 6.2 节, 我们考虑高阶 ($k \geq 2$) 的分段非多项式基的有限元空间的 RKDG(2.1.5a-2.1.5b) 格式, 在一个较强的 CFL 条件 $\tau \leq C_{CFL} h^{\frac{4}{3}}$ 下, 我们将会证明定理2.7.1的 (2.7.1) 式. 在 6.2 节, 我们考虑一阶 ($k = 1$) 的分段非多项式基的有限元空间的 RKDG(2.1.5a-2.1.5b) 格式, 在一个一般的 CFL 条件 $\tau \leq C_{CFL} h$ 下, 我们将会证明定理2.7.1 的 (2.7.2) 式. 迎风数值通量的情况的证明步骤和普通单调数值通量的情况类似, 我们放在 6.2 节.

时间离散导出的一个关键不等式

在这一部分我们首先考虑算子 $\tilde{L}^n$ 和 $\tilde{K}^n$ 之间的差异, 然后得到 $\|\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n\|$ 的关键估计, 这个误差来自时间离散, 分析的主要技巧是 Taylor 展开. 定义:

$$\Pi(n) = f(w^n) - f(\tilde{w}_h^n) - f(u^n) + f(\tilde{u}_h^n), \quad x \text{ 在每个区间单元 } I_j \text{ 中.}$$

$$\hat{\Pi}(n) = f(w^n) - \hat{h}(\tilde{w}_h^n) - f(u^n) + \hat{h}(\tilde{u}_h^n), \quad x \text{ 在每个区间单元 } I_j \text{ 的边界.}$$

其中, $\hat{h}$ 是数值通量.

$$w^n = w(x, t^n) = u(x, t^n) - \partial_x f(u(x, t^n)) \tau,$$

$$\tilde{w}_h^n = \tilde{u}_h(x, t^n) - \partial_x f(\tilde{u}_h(x, t^n)) \tau,$$

(2.2.7) 减 (2.2.6), 我们有: 对 $\forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h^k$,

$$\begin{aligned} (\tilde{L}_j^n - \tilde{K}_j^n)(\tilde{v}_h) &= 2 \int_{I_j} (\tilde{\eta}_u^{n+1} - \tilde{\eta}_u^n + E(x; n)) \tilde{v}_h dx + \tau \int_{I_j} \Pi(n) \partial_x \tilde{v}_h dx \\ &\quad - \tau \hat{\Pi}(n)_{j+\frac{1}{2}} \tilde{v}_h \left(x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) + \tau \hat{\Pi}(n)_{j-\frac{1}{2}} \tilde{v}_h \left(x_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) \\ &= \theta_{1,j}(\tilde{v}_h) + \theta_{2,j}(\tilde{v}_h) + \theta_{3,j}(\tilde{v}_h) + \theta_{4,j}(\tilde{v}_h). \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

定义: $\Theta_i(\tilde{v}_h) = \sum_{j=1}^N \theta_{i,j}(\tilde{v}_h)$,

我们会逐项分析 (6.2.1) 的每一项.

首先, 结合 Young's 不等式, $E(x, n) = O(\tau^3)$, (2.5.12), 可得:

$$|\Theta_1(\tilde{v}_h)| \leq C(h^{2k+2}\tau^2 + \tau^6) + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|_{\Omega}^2, \quad (6.2.2)$$

其中 ε 是一个稍后会被选择的小的正常数.

接下来估计第二项 $\Theta_2(\tilde{v}_h)$, 结合 Taylor 展开和 (2.2.1), 我们有:

$$\begin{aligned} \Pi(n) = & \tau f''_{w,u} u'_t(t) \left(\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\eta}_w^n \right) - \frac{1}{2} f''_w \left(\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\eta}_w^n \right)^2 + \frac{1}{2} f''_u \left(\tilde{\xi}_u^n - \tilde{\eta}_u^n \right)^2 \\ & - f'(u^n) (\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n) + f'(u^n) \left(\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n \right), \\ \triangleq & R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5, \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

其中 f''_u, f''_w 和 $f''_{w,u}$ 是一些平均值, 例如 $f''_u = f''(\theta_u u^n + (1 - \theta_u) \tilde{u}_h^n)$, $0 \leq \theta_u \leq 1$

因此, 我们可以将第二项写为:

$$\theta_{2,j}(\tilde{v}_h) = \sum_{i=1}^5 \int_{I_j} \tau R_i \partial_x \tilde{v}_h dx = \sum_{i=1}^5 S_{i,j}(\tilde{v}_h),$$

定义 $S_i(\tilde{v}_h) = \sum_{j=1}^N S_{i,j}(\tilde{v}_h)$ 因此我们有: $\Theta_2(\tilde{v}_h) = \sum_{i=1}^5 S_i(\tilde{v}_h)$

由 Young's 不等式和分段三角基有限元空间下的逆不等式 (2.6.9a), 可得:

$$\begin{aligned} |S_1(\tilde{v}_h)| & \leq \frac{C_* \tau^4}{h^2} \left\| \tilde{\xi}_w^n - \tilde{\eta}_w^n \right\|^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2, \\ |S_2(\tilde{v}_h)| & \leq \frac{C_* \tau^2}{h^2} \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2 \left\| \tilde{\xi}_w^n - \tilde{\eta}_w^n \right\|^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2, \\ |S_3(\tilde{v}_h)| & \leq \frac{C_* \tau^2}{h^2} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \left\| \tilde{\xi}_u^n - \tilde{\eta}_u^n \right\|^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2, \\ |S_4(\tilde{v}_h)| & \leq \frac{C_* \tau^2}{h^2} \|\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n\|^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2. \end{aligned}$$

这里的最后一项 $S_5(\tilde{v}_h)$ 先不做估计, 它在后面将会和其它项放在一起估计.

其中 $S_{5,j}(\tilde{v}_h) = \tau \int_{I_j} f'(u^n) \left(\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n \right) \partial_x \tilde{v}_h dx$,

接下来, 我们将会估计和数值通量相关的后两项, 也就是 $\Theta_3(\tilde{v}_h)$ 和 $\Theta_4(\tilde{v}_h)$, 为了实现这一点, 我们在每个单元 I_j 上考虑它们, 并且估计 $\theta_{3,j}(\tilde{v}_h)$ 和 $\theta_{4,j}(\tilde{v}_h)$, 因为它们的估计方法类似, 我们只给出 $\theta_{3,j}(\tilde{v}_h) = -\tau \hat{\Pi}(n)_{j+\frac{1}{2}} \tilde{v}_h \left(x_{j+\frac{1}{2}}^- \right)$ 的估计作为例子, 注意到:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(n) = & f(w^n) - f(\tilde{w}_h^n) - f(u^n) + f(\tilde{u}_h^n) - f(\tilde{u}_h^n) + \hat{h}(\tilde{u}_h^n) + f(\tilde{w}_h^n) - \hat{h}(\tilde{w}_h^n) \\ \triangleq & \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

其中

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= f(w^n) - f(\widetilde{w}_h^n), \quad \Lambda_2 = -f(u^n) + f(\widetilde{u}_h^n), \\ \Lambda_3 &= -f(\widetilde{u}_h^n) + \hat{h}(\widetilde{u}_h^n), \quad \Lambda_4 = f(\widetilde{w}_h^n) - \hat{h}(\widetilde{w}_h^n), \\ \widetilde{u}_h^n &= \frac{\widetilde{u}_h^n(x_{j+\frac{1}{2}}^-) + \widetilde{u}_h^n(x_{j+\frac{1}{2}}^+)}{2}, \quad \widetilde{w}_h^n = \frac{\widetilde{w}_h^n(x_{j+\frac{1}{2}}^-) + \widetilde{w}_h^n(x_{j+\frac{1}{2}}^+)}{2}.\end{aligned}$$

和我们前面对 $\theta_{2,j}(\widetilde{v}_h)$ 进行的操作一样, 我们将 Λ_1 和 Λ_2 进行如下形式的 Taylor 展开:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 + \Lambda_2 &= f''_{w,u} u'(t) \tau \left(\widetilde{\xi}_w^n - \widetilde{\eta}_w^n \right) - \frac{1}{2} f''_w \left(\widetilde{\xi}_w^n - \widetilde{\eta}_w^n \right)^2 + \frac{1}{2} f''_u \left(\widetilde{\xi}_u^n - \widetilde{\eta}_u^n \right)^2 \\ &\quad - f'(u^n) \left(\widetilde{\eta}_w^n - \widetilde{\eta}_u^n \right) + f'(u^n) \left(\widetilde{\xi}_w^n - \widetilde{\xi}_u^n \right) \\ &\triangleq Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5.\end{aligned}\tag{6.2.5}$$

其中 f''_u, f''_w 和 $f''_{w,u}$ 和前面介绍过的一样, 是某些平均值, 注意到在这里我们为了方便, 使用了和 (6.2.3) 中相同的符号, 但是注意它们可能代表不同的平均值, 因此我们有如下关于 $\theta_{3,j}(\widetilde{v}_h)$ 和 $\theta_{4,j}(\widetilde{v}_h)$ 的表达式:

$$\begin{aligned}\theta_{3,j} &= -\tau (Q_1 + \cdots + Q_5 + \Lambda_3 + \Lambda_4)_{j+\frac{1}{2}} v_h \left(x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) \triangleq (T_{1,j} + \cdots + T_{7,j})(\widetilde{v}_h), \\ \theta_{4,j} &= -\tau (Q_1 + \cdots + Q_5 + \Lambda_3 + \Lambda_4)_{j-\frac{1}{2}} v_h \left(x_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) \triangleq (\widetilde{T}_{1,j} + \cdots + \widetilde{T}_{7,j})(\widetilde{v}_h),\end{aligned}$$

$$\text{定义 } T_i(\widetilde{v}_h) = \sum_{j=1}^N T_{i,j}(\widetilde{v}_h), \quad \widetilde{T}_i(\widetilde{v}_h) = \sum_{j=1}^N \widetilde{T}_{i,j}(\widetilde{v}_h),$$

$$\text{所以 } \Theta_3 = \sum_{j=1}^N \theta_{3,j} = \sum_{j=1}^N (T_{1,j} + \cdots + T_{7,j})(\widetilde{v}_h) = (T_1 + \cdots + T_7)(\widetilde{v}_h),$$

$$\Theta_4 = \sum_{j=1}^N \theta_{4,j} = \sum_{j=1}^N (\widetilde{T}_{1,j} + \cdots + \widetilde{T}_{7,j})(\widetilde{v}_h) = (\widetilde{T}_1 + \cdots + \widetilde{T}_7)(\widetilde{v}_h).$$

由 Young's 不等式和三角基有限元空间的逆不等式属性 (2.6.9b), 可得:

$$\begin{aligned}
 |T_1(\tilde{v}_h)| &\leq \frac{C_*\tau^4}{h^2} \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 + \frac{C_*\tau^4}{h} \|\tilde{\eta}_w^n\|_{\Gamma_h}^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2, \\
 |T_2(\tilde{v}_h)| &\leq \frac{C_*\tau^2}{h^2} \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 + \frac{C_*\tau^2}{h} \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2 \|\tilde{\eta}_w^n\|_{\Gamma_h}^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2, \\
 |T_3(\tilde{v}_h)| &\leq \frac{C_*\tau^2}{h^2} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \frac{C_*\tau^2}{h} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \|\tilde{\eta}_u^n\|_{\Gamma_h}^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2, \\
 |T_4(\tilde{v}_h)| &\leq \frac{C\tau^2}{h} \|\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n\|_{\Gamma_h}^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2.
 \end{aligned}$$

这里的 $T_5(\tilde{v}_h)$ 先不做估计, 它在后面将会和其它项放在一起估计, 在每个单元 I_j 上, $T_{5,j}(\tilde{v}_h) = -\tau f'(u_{j+\frac{1}{2}}^n) (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n)_{j+\frac{1}{2}} \tilde{v}_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-)$, 至于最后两项 Λ_3 和 Λ_4 , 结合引理 2.1.2(2.1.6),

关于 $\alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n)$ 的定义, 我们有:

$$|\Lambda_3| = \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) |[\tilde{u}_h^n]| = \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) |u^n - \tilde{u}_h^n| \leq \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) \left(\left| [\tilde{\xi}_u^n] \right| + |[\tilde{\eta}_u^n]| \right), \quad (6.2.6)$$

$$|\Lambda_4| = \alpha(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) |[\tilde{w}_h^n]| = \alpha(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) |w^n - \tilde{w}_h^n| \leq \alpha(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) \left(\left| [\tilde{\xi}_w^n] \right| + |[\tilde{\eta}_w^n]| \right). \quad (6.2.7)$$

则由 Young's 不等式可得到:

$$\begin{aligned}
 |T_6(\tilde{v}_h)| &\leq \frac{M(\varepsilon)\tau^2}{h} \alpha^2(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 + \frac{C\tau^2}{h} \alpha^2(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\eta}_u^n]^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2, \\
 |T_7(\tilde{v}_h)| &\leq \frac{M(\varepsilon)\tau^2}{h} \alpha^2(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n]^2 + \frac{C\tau^2}{h} \alpha^2(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\eta}_w^n]^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2.
 \end{aligned}$$

因此我们可以得到 $\Theta_3(\tilde{v}_h)$ 的估计, 同样的过程可以得到 $\Theta_4(\tilde{v}_h)$ 的估计. $\tilde{T}_i(\tilde{v}_h)$, $\tilde{T}_5(\tilde{v}_h)$

的分析和 $T_i(\tilde{v}_h)$, $T_5(\tilde{v}_h)$ 的分析一样, 同样的 $\tilde{T}_5(\tilde{v}_h) = \sum_{j=1}^N \tilde{T}_{5,j}(\tilde{v}_h)$,

其中 $\tilde{T}_{5,j}(\tilde{v}_h) = \tau f'(u_{j-\frac{1}{2}}^n) (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n)_{j-\frac{1}{2}} \tilde{v}_h(x_{j-\frac{1}{2}}^+)$, $\tilde{T}_5(\tilde{v}_h)$ 先不做估计, 他在后面将会和其它项放在一起估计.

现在, 若完成 $S_5(\tilde{v}_h)$, $T_5(\tilde{v}_h)$, $\tilde{T}_5(\tilde{v}_h)$ 这三项的估计, 我们就完成了 $(\tilde{L}_j^n - \tilde{K}_j^n)(\tilde{v}_h)$

的估计, 在每个单元 I_j 上考虑它们的和, 经过一个简单的分部积分, 我们有:

$$\begin{aligned}
& S_{5,j}(\tilde{v}_h) + T_{5,j}(\tilde{v}_h) + \tilde{T}_{5,j}(\tilde{v}_h) \\
&= -\tau \int_{I_j} f'(u_j^n) \tilde{v}_h \partial_x (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n) dx - \tau \int_{I_j} (f'(u^n) - f'(u_j^n)) \tilde{v}_h \partial_x (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n) dx \\
&\quad - \tau \int_{I_j} \partial_x f'(u^n) (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n) \tilde{v}_h dx - \frac{\tau}{2} f'(u_{j+\frac{1}{2}}^n) [\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n]_{j+\frac{1}{2}} \tilde{v}_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-) \\
&\quad - \frac{\tau}{2} f'(u_{j-\frac{1}{2}}^n) [\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n]_{j-\frac{1}{2}} \tilde{v}_h(x_{j-\frac{1}{2}}^+), \\
&\triangleq G_{1,j}(\tilde{v}_h) + G_{2,j}(\tilde{v}_h) + G_{3,j}(\tilde{v}_h) + G_{4,j}(\tilde{v}_h) + G_{5,j}(\tilde{v}_h).
\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

其中 $u_j^n = u\left(\frac{1}{2}(x_{j+\frac{1}{2}} + x_{j-\frac{1}{2}}), t^n\right)$,

定义 $G_i(\tilde{v}_h) = \sum_{j=1}^N G_{i,j}(\tilde{v}_h)$, 则:

$$S_5(\tilde{v}_h) + T_5(\tilde{v}_h) + \tilde{T}_5(\tilde{v}_h) = G_1(\tilde{v}_h) + G_2(\tilde{v}_h) + G_3(\tilde{v}_h) + G_4(\tilde{v}_h) + G_5(\tilde{v}_h). \tag{6.2.9}$$

我们分开讨论 (6.2.9) 的每一项.

注意到, 当 $x \in I_j$ 时, 由 Taylor 展开: $f'(u^n)|_{x \in I_j} = f'(u_j^n) + f''(u_j^n)(u^n - u_j^n) + \dots$,

所以当 $x \in I_j$ 时, 有:

$$\begin{aligned}
|f'(u^n) - f'(u_j^n)| &= |f^{(2)}(u_j^n)(x - x_j) + \frac{f^{(2)}(u_j^n)}{2}(x - x_j)^2 \dots| \\
&\leq f^{(2)}(u_j^n)(x - x_j) + \left| \frac{f^{(2)}(u_j^n)}{2}(x - x_j)^2 \right| + \dots \tag{6.2.10} \\
&= O(h).
\end{aligned}$$

则由三角函数有限元空间的逆不等式 (2.6.9a) 和 Young's 不等式, 有:

$$\begin{aligned}
|G_2(\tilde{v}_h)| &\leq C\tau^2 \left\| \tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2, \\
|G_3(\tilde{v}_h)| &\leq C\tau^2 \left\| \tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2.
\end{aligned}$$

$G_{4,j}(\tilde{v}_h)$ 与 $G_{5,j}(\tilde{v}_h)$ 的估计类似, 下面仅以 $G_{4,j}(\tilde{v}_h)$ 的估计来举例子, 方便起见,

下面的式子中均省略了下标 $j + \frac{1}{2}$, 我们有如下关系:

$$\begin{aligned} f'(u^n) [\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n] &= f'(w^n) [\tilde{\xi}_w^n] - f'(u^n) [\tilde{\xi}_u^n] + (f'(u^n) - f'(w^n)) [\tilde{\xi}_w^n] \\ &= f'(\tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n] - f'(\tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n] + (f'(w^n) - f'(\tilde{w}_h^n)) [\tilde{\xi}_w^n] \\ &\quad - (f'(u^n) - f'(\tilde{u}_h^n)) [\tilde{\xi}_u^n] + (f'(u^n) - f'(w^n)) [\tilde{\xi}_w^n] \\ &\triangleq \gamma_{1,j} + \gamma_{2,j} + \cdots \gamma_{5,j}. \end{aligned}$$

则有 $G_4(\tilde{v}_h) = \sum_{j=1}^N G_{4,j}(\tilde{v}_h) = \sum_{i=1}^5 \gamma_i(\tilde{v}_h)$, 其中 $\gamma_i(\tilde{v}_h) = -\frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^N \gamma_{i,j} \tilde{v}_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-)$, 为了估计 $\gamma_1(\tilde{v}_h)$ 和 $\gamma_2(\tilde{v}_h)$, 我们需要利用引理2.1.2 的结论 (2.1.7c), 则由 Young's 不等式和三角基有限元空间的逆不等式属性 (2.6.9b), 可得:

$$\begin{aligned} |\gamma_1(\tilde{v}_h)| &\leq M(\varepsilon) \frac{\tau^2}{h} \alpha^2(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n]^2 + \frac{C_* \tau^2}{h^2} \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 + \frac{\varepsilon}{5} \|\tilde{v}_h\|^2, \\ |\gamma_2(\tilde{v}_h)| &\leq M(\varepsilon) \frac{\tau^2}{h} \alpha^2(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 + \frac{C_* \tau^2}{h^2} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \frac{\varepsilon}{5} \|\tilde{v}_h\|^2, \\ |\gamma_3(\tilde{v}_h)| &\leq \frac{C_* \tau^2}{h^2} \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 + \frac{\varepsilon}{5} \|\tilde{v}_h\|^2, \\ |\gamma_4(\tilde{v}_h)| &\leq \frac{C_* \tau^2}{h^2} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \frac{\varepsilon}{5} \|\tilde{v}_h\|^2, \\ |\gamma_5(\tilde{v}_h)| &\leq \frac{C_* \tau^4}{h^2} \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 + \frac{\varepsilon}{5} \|\tilde{v}_h\|^2. \end{aligned}$$

(注: 这里的 $\alpha^2(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n]^2$ 实际上是 $\sum_{j=1}^N \left(\alpha^2(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n]^2 \right)_{j+\frac{1}{2}}$ 的简写)

将上述不等式相加后, 我们可以得到如下结论:

$$\begin{aligned} |G_4(\tilde{v}_h)| &\leq \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2 + \frac{C_* \tau^2}{h^2} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \frac{C_* \tau^2}{h^2} \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 + \frac{C_* \tau^4}{h^2} \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 \\ &\quad + M(\varepsilon) \frac{\tau^2}{h} \alpha^2(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n]^2 + M(\varepsilon) \frac{\tau^2}{h} \alpha^2(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2, \end{aligned}$$

我们可以模仿 $G_4(\tilde{v}_h)$ 的误差估计的方法得出 $G_5(\tilde{v}_h)$ 的误差估计, 注意到我们还没有分析 (6.2.9) 中的第一项 $G_1(\tilde{v}_h) = \sum_{j=1}^N G_{1,j}(\tilde{v}_h)$,

其中 $G_{1,j}(\tilde{v}_h) = -\tau \int_{I_j} f'(u_j^n) \tilde{v}_h \partial_x (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n) dx$, 这将被留在后面再做考虑.

我们将上述估计合在一起得到一个关键的误差估计, 由投影 $\tilde{P}_h$ 的近似估计定理2.5.4(2.5.5) 和推论2.5.5 (2.5.12), 并在一般的 CFL 条件 $\tau \leq C_{CFL} h$ 下: 经过简

单的计算得:

$$\begin{aligned}
(\tilde{L}^n - \tilde{K}^n)(\tilde{v}_h) &\leq \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2 + M(\varepsilon) \frac{\tau^2}{h} \alpha^2 (\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n]^2 + M(\varepsilon) \frac{\tau^2}{h} \alpha^2 (\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 \\
&\quad + \frac{C_* \tau^2}{h^2} \left(\|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 \right) + C \tau^2 \left(\|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 \right) \\
&\quad + C \left(\Xi(n) h^{2k+1} \tau + \tau^6 \right) - \sum_{j=1}^N \tau f'(u_j^n) \int_{I_j} \tilde{v}_h \partial_x (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n) dx,
\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

其中 $\Xi(n) = 1 + C_* \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 + C_* \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2$, $M(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$, ε 是个充分小的正数
现在, 我们可以用 (6.2.11) 来估计 $\|\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n\|$, 这是 RK2-DG 导出的误差. (2.2.6)
减 (2.2.5b) 得: 对 $\forall 1 \leq j \leq N$, 有:

$$\int_{I_j} (\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n) \tilde{v}_h dx = \frac{1}{2} (\tilde{L}_j^n - \tilde{K}_j^n) (\tilde{v}_h), \quad \forall \tilde{v}_h \in \tilde{P}_k(I_j). \tag{6.2.12}$$

在 (6.2.11), (6.2.12) 中, 取测试函数 $\tilde{v}_h = \tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n$, 令 (6.2.11) 中的 ε 取充分小, 得:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n\|^2 &\leq C \left(\Xi(n) h^{2k+1} \tau + \tau^6 \right) + \frac{M \tau^2}{h} \alpha^2 (\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n]^2 + \frac{M \tau^2}{h} \alpha^2 (\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 \\
&\quad + \frac{C_* \tau^2}{h^2} \left(\|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 \right) + C \tau^2 \left(\|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \tau f'(u_j^n) \int_{I_j} (\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n) \partial_x (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n) dx,
\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

剩下需要做的就是估计 (6.2.13) 中的最后一个积分项. 在 (6.2.12) 中, 我们取测试函数 $\tilde{v}_h = -\tau f'(u_j^n) \partial_x (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n)$ 则对 $\forall 1 \leq j \leq N$, 有:

$$-\tau f'(u_j^n) \int_{I_j} (\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n) \partial_x (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n) dx = \frac{1}{2} (\tilde{L}_j^n - \tilde{K}_j^n) \left(-\tau f'(u_j^n) \partial_x (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n) \right), \tag{6.2.14}$$

这就是说, 我们如果在 (6.2.11) 中取测试函数 $\tilde{v}_h = -\tau f'(u_j^n) \partial_x (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n)$, 我们就可以估计出 (6.2.13) 的最后一个积分项, 将 $\tilde{v}_h = -\tau f'(u_j^n) \partial_x (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n)$ 代入 (3.2.2), 有:

$$\begin{aligned}
 \left\| \tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n \right\|^2 &\leq C \left(\Xi(n) h^{2k+1} \tau + \tau^6 \right) + \frac{M \tau^2}{h} \alpha^2 \left(\hat{h}, \tilde{w}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_w^n \right]^2 + \frac{M \tau^2}{h} \alpha^2 \left(\hat{h}, \tilde{u}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_u^n \right]^2 \\
 &\quad + \frac{C_* \tau^2}{h^2} \left(\left\| \tilde{e}_u^n \right\|_\infty^2 \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 + \left\| \tilde{e}_w^n \right\|_\infty^2 \left\| \tilde{\xi}_w^n \right\|^2 \right) + C \tau^2 \left(\left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 + \left\| \tilde{\xi}_w^n \right\|^2 \right) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^N \tau^2 \left| f'(u_j^n) \right|^2 \int_{I_j} \left(\partial_x \left(\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n \right) \right)^2 dx.
 \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

其中 C 和 C_* 与 n, h, τ 无关, 这个就是我们要的关键不等式, 它对任意高阶分段三角基有限元空间都成立. 在接下来的两部分, 我们将利用这个关键不等式 (6.2.15) 来获得不同有限元空间的误差估计: 高阶分段三角基有限元空间和一阶分段三角基有限元空间, 在接下来的分析中, 我们将会详细分析 (6.2.15) 的最后一项.

高阶分段三角基有限元空间的误差估计

本节我们将会考虑在较强的 CFL 条件 $\left(\tau \leq C_{CFL} h^{\frac{4}{3}} \right)$ 下, 高阶分段三角基 ($k \geq 2$) 的有限元空间的 RKDG 方法的误差估计, 为了处理非线性数值通量 $f(u)$, 我们给出如下的先验假设: 对于充分小的 h , 有:

$$\left\| u^n - \tilde{u}_h^n \right\| \leq h^{\frac{3}{2}}. \tag{6.2.16}$$

结合 (2.5.5), 容易验证, 当 $n = 0$ 时, $\tilde{u}_h^0 = \tilde{P}_h u_0(x)$ 是满足 (6.2.16) 的. 稍后验证 (6.2.16) 的正确性, 证明若第 n 层成立, 则 $n + 1$ 层也成立. 对于线性数值通量 $f = cu$, 这个先验假设是不必要的. 接下来, 我们将分别分析 (2.2.8) 等式的左端和右端.

(2.2.8) 等式右端的误差估计. 为了估计 $\left\| \tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n \right\|^2$, 所需做的工作是估计 (6.2.13) 的最后一项, 对于高阶分段三角基有限元空间 $\tilde{V}_h^k (k \geq 2)$, 由针对三角基有限元空间的逆不等式 (2.6.9a), 可转化为对 $\left\| \tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n \right\|^2$ 的估计, 下面先分析对于 $k = 1$ 的一阶分段三角基有限元空间成立. 对于 $\forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h^k$, 我们首先考虑算子 $\tilde{K}_j^n(\tilde{v}_h)$, 注意到:

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}_j^n(\tilde{v}_h) &= \int_{I_j} (\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n) \tilde{v}_h(x) dx + \tau \int_{I_j} (f(u^n) - f(\tilde{u}_h^n)) \partial_x \tilde{v}_h(x) dx \\
 &\quad - \tau \left(f(u^n) - \hat{h}(\tilde{u}_h^n) \right)_{j+\frac{1}{2}} \tilde{v}_h \left(x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) + \tau \left(f(u^n) - \hat{h}(\tilde{u}_h^n) \right)_{j-\frac{1}{2}} \tilde{v}_h \left(x_{j-\frac{1}{2}}^+ \right),
 \end{aligned}$$

上式的第一项可以通过投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性 2.5.5 (2.5.12) 和 Young's 不等式来估计, 对于第二项积分里的式子, 因为 $f \in C^3$ 所以有不等式 $|f(u^n) - f(\tilde{u}_h^n)| \leq C |\tilde{\xi}_u^n - \tilde{\eta}_u^n|$ 成立, 利用该不等式即可估计第二项, 对于第三项和第四项, 有

$$\begin{aligned} |f(u^n) - \hat{h}(\tilde{u}_h^n)| &= |f(u^n) - \hat{h}(\tilde{u}_h^-, \tilde{u}_h^+)| \leq M \cdot \max(|u - \tilde{u}_h^-|, |u - \tilde{u}_h^+|) \\ &\leq C |u - \tilde{u}_h^-| + C |u - \tilde{u}_h^+| = C |\tilde{\xi}_u - \tilde{\eta}_u|^- + C |\tilde{\xi}_u - \tilde{\eta}_u|^+, \quad \forall I_j \end{aligned}$$

再结合 (2.5.5) 和 Young's 不等式, 我们得到:

$$\tilde{K}^n(\tilde{v}_h) \leq \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2 + \frac{C\tau^2}{h^2} \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + Ch^{2k}\tau^2, \quad (6.2.17)$$

由误差方程 (2.2.5a), 可知 $\|\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n\|^2 = \tilde{K}^n(\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n)$, 因此我们在 (6.2.17) 中取测试函数 $\tilde{v}_h = \tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n$, 并令 ε 取充分小, 得到:

$$\|\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n\| \leq \frac{C\tau^2}{h^2} \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + Ch^{2k}\tau^2, \quad (6.2.18)$$

在通常的 CFL 条件 ($\tau \leq C_{CFL}h$) 下, 由 (6.2.18) 可得:

$$\|\tilde{\xi}_w^n\|^2 \leq Ch^{2k}\tau^2 + C \left(1 + \frac{\tau^2}{h^2}\right) \|\tilde{\xi}_u^n\| \leq Ch^{2k+2} + C \|\tilde{\xi}_u^n\|^2, \quad (6.2.19)$$

结合 6.2.15)(6.2.18)(6.2.19), 并利用分段三角基有限元空间的逆不等式 (2.6.9a), 我们可以得出 (2.2.8) 等式右端的误差估计:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n\|^2 &\leq C (\Xi(n)h^{2k+1}\tau + \tau^6) + \frac{M\tau^2}{h}\alpha^2(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n]^2 + \frac{M\tau^2}{h}\alpha^2(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 \\ &\quad + \left(\frac{C_*\tau^2}{h^2} (\|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 + \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2) + C \left(\tau^2 + \frac{\tau^4}{h^4}\right)\right) \|\tilde{\xi}_u^n\|^2, \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

其中常数 C 和 C_* 与 $n, h, \tau, \tilde{u}_h, \tilde{w}_h$ 无关, M 只与充分小的正数 ε 有关, $\Xi(n) = 1 + C_* \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 + C_* \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2$, (6.2.20) 的最后一项的 $\|\tilde{\xi}_u^n\|^2$ 前面的因子 $\frac{\tau^4}{h^4}$ 表明需要一个更强的 CFL 条件 ($\tau \leq C_{CFL}h^{\frac{4}{3}}$), 这是因为 $k \geq 2$ 时, RKDG(2.1.5a-2.1.5b) 在一般的 CFL 条件 ($\tau \leq C_{CFL}h$) 下不稳定, 具体见^[35], 然而 $k = 1$ 的情况则不需要这么强的 CFL 条件, 详细分析步骤将在 6.2 节中介绍.

(2.2.8) 等式左端的误差估计. 另一方面, 由周期边界条件, 将 $\tilde{K}_j^n(\tilde{\xi}_u^n)$ 累和并经过

一个简单的计算后, 得:

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}^n(\tilde{\xi}_u^n) &= \left(\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n, \tilde{\xi}_u^n \right) + \tau \sum_{j=1}^N \int_{I_j} (f(u^n) - f(\tilde{u}_h^n)) \partial_x \tilde{\xi}_u^n dx \\
 &\quad + \tau \sum_{j=1}^N \left(f(u^n) - f(\tilde{u}_h^n) \right)_{j+1/2} \left[\tilde{\xi}_u^n \right]_{j+1/2} + \tau \sum_{j=1}^N \left(f(\tilde{u}_h^n) - \hat{h}(\tilde{u}_h^n) \right)_{j+1/2} \left[\tilde{\xi}_u^n \right]_{j+1/2} \\
 &\triangleq W_1 + W_2 + W_3 + W_4.
 \end{aligned} \tag{6.2.21}$$

我们会逐项分析 (6.45) 得各项, 由投影 $\tilde{P}_h$ 的近似属性 (2.5.12), 利用 Young's 不等式, 我们有:

$$\begin{aligned}
 |W_1| &\leq \left| \left(\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n, \tilde{\xi}_u^n \right) \right| \leq \|\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n\| \cdot \|\tilde{\xi}_u^n\| \leq \frac{1}{\tau} \|\tilde{\eta}_w^n - \tilde{\eta}_u^n\| + \frac{\tau}{4} \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 \\
 &\leq \frac{1}{\tau} Ch^{2k+2} \tau^2 + \frac{\tau}{4} \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 \leq Ch^{2k+2} \tau + C\tau \|\tilde{\xi}_u^n\|^2,
 \end{aligned} \tag{6.2.22}$$

利用 Taylor 展开, 并注意到 $\tilde{\xi}_u^n - \tilde{\eta}_u^n = u - \tilde{u}_h$, 有:

$$f(u^n) - f(\tilde{u}_h^n) = f'(u^n) \tilde{\xi}_u^n - f'(u^n) \tilde{\eta}_u^n - \frac{1}{2} \tilde{f}_u'' \left(\tilde{\xi}_u^n - \tilde{\eta}_u^n \right)^2, \tag{6.2.23}$$

$$f(u^n) - f(\tilde{u}_h^n) = f'(u^n) \tilde{\xi}_u^n - f'(u^n) \tilde{\eta}_u^n - \frac{1}{2} \tilde{f}_u'' \left(\tilde{\xi}_u^n - \tilde{\eta}_u^n \right)^2, \tag{6.2.24}$$

其中 $\tilde{f}_u''$ 和 $\tilde{f}_u''$ 是一些均值, 由分部积分, 有:

$$\sum_{j=1}^N \int_{I_j} f'(u^n) \tilde{\xi}_u^n \partial_x \tilde{\xi}_u^n dx = - \sum_{j=1}^N f'(u^n) \tilde{\xi}_{u,j+\frac{1}{2}} \left[\tilde{\xi}_u^n \right]_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \partial_x f'(u^n) \left(\tilde{\xi}_u^n \right)^2 dx,$$

则经过一个简单的计算, 我们有:

$$\begin{aligned}
 W_2 + W_3 &= -\tau \sum_{j=1}^N \int_{I_j} f'(u^n) \tilde{\eta}_u^n \partial_x \tilde{\xi}_u^n dx - \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \partial_x f'(u^n) \left(\tilde{\xi}_u^n \right)^2 dx \\
 &\quad - \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \tilde{f}_u'' \left(\tilde{\xi}_u^n - \tilde{\eta}_u^n \right)^2 \partial_x \tilde{\xi}_u^n dx - \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^N \tilde{f}_u'' \left(\tilde{\xi}_u^n - \tilde{\eta}_u^n \right)^2 \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \left[\tilde{\xi}_u^n \right]_{j+\frac{1}{2}} \\
 &\quad - \tau \sum_{j=1}^N f' \left(u_{j+\frac{1}{2}}^n \right) \tilde{\eta}_u^n \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \left[\tilde{\xi}_u^n \right]_{j+\frac{1}{2}} \\
 &\triangleq Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5.
 \end{aligned}$$

利用 u 的光滑性, (6.2.10), 针对三角基情形的逆不等式 (2.6.9a), 定义 (2.1.1) 的 L^2

投影 $\tilde{P}_h$, 定理2.5.4 投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性 (2.5.5), Young's 不等式, 可以得到:

$$|Y_1| \leq \tau \sum_{j=1}^N \left| \int_{I_j} (f'(u^n) - f'(u_j^n)) \tilde{\eta}_u^n \partial_x \tilde{\xi}_u^n dx \right| \leq Ch^{2k+2} \tau + C\tau \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2, \quad (6.2.25)$$

结合针对三角基情形的逆不等式 (2.6.9b)(2.6.9c), 可以得到:

$$\begin{aligned} |Y_2| &\leq C\tau \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2, \\ |Y_3| &\leq \frac{C_*\tau}{h^2} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \left\| \tilde{\xi}_u^n - \tilde{\eta}_u^n \right\|^2 + C\tau \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2, \\ |Y_4| &\leq \frac{C_*\tau}{h^2} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 + \frac{C_*\tau}{h^2} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \|\tilde{\eta}_u^n\|_{\Gamma_h}^2 + C\tau \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2. \end{aligned}$$

由引理2.1.2的 (2.1.7c), 并利用 Taylor 展开, 可知 $\left| f'(u_{j+\frac{1}{2}}^n) \right| \leq 2\alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n)_{j+\frac{1}{2}} + C_* \|\tilde{e}_u^n\|_\infty$ 对 $\forall 1 \leq j \leq N$ 成立, 由 Young's 不等式, 并注意到 $\alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n)$ 的有界性 (注: 这里的 $\alpha^2(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2$ 实际上是 $\sum_{j=1}^N \left(\alpha^2(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 \right)_{j+\frac{1}{2}}$ 的简写), 可得:

$$|Y_5| \leq Ch^{2k+1} \tau + \frac{1}{4} \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 \tau + \frac{C_*\tau}{h} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2,$$

将所有的 Y_i 加起来, 并利用定理2.5.4 投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性 (2.5.5), 可得:

$$|W_2 + W_3| \leq \left(C + \frac{C_* \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2}{h} \right) h^{2k+1} \tau + \left(C + \frac{C_* \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2}{h^2} \right) \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 \tau + \frac{1}{4} \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 \tau, \quad (6.2.26)$$

注意到引理2.1.2 中, $\alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n)$ 的定义, 和 $[\tilde{u}_h^n] = -[\tilde{e}_u^n] = [\tilde{\eta}_u^n - \tilde{\xi}_u^n]$, 结合 Young's 不等式和 (2.5.5), 得:

$$\begin{aligned} |W_4| &\leq -\frac{3}{4} \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 \tau + C \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\eta}_u^n]^2 \tau \\ &\leq -\frac{3}{4} \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 \tau + Ch^{2k+1} \tau, \end{aligned} \quad (6.2.27)$$

因此, 将上述不等式关系结合起来, 并假设 $h \leq 1$, 我们可以得到 $K^n(\tilde{\xi}_u^n)$ 的误差估计:

$$K^n(\tilde{\xi}_u^n) \leq \left(C + \frac{C_* \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2}{h^2} \right) \left(h^{2k+1} \tau + \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 \tau \right) - \frac{1}{2} \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 \tau, \quad (6.2.28)$$

同样地, 我们可以得出如下估计:

$$L^n(\tilde{\xi}_w^n) \leq C\tau^5 + \left(C + \frac{C_* \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2}{h^2} \right) \left(h^{2k+1}\tau + \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 \tau \right) - \frac{1}{2}\alpha(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n] \tau, \quad (6.2.29)$$

在结合 (2.2.8) 左端和右端来得到误差估计之前, 我们先来看看前面提到的先验假设 (6.2.16), 由针对三角基情形的逆不等式 (2.6.9c) 和投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性 (2.5.5), 则该先验假设 (6.2.16) 表明:

$$\|u^n - \tilde{u}_h^n\|_\infty \leq Ch, \quad \|\tilde{\xi}_u^n\|_\infty \leq Ch. \quad (6.2.30)$$

由先验假设 (6.2.16) 和 (6.2.19), 可得 $\|w^n - \tilde{w}_h^n\| \leq Ch^2$, 因此, 由针对三角基情形的逆不等式 (2.6.9c) 和投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性 (2.5.5), 我们有:

$$\|w^n - \tilde{w}_h^n\|_\infty \leq Ch, \quad \|\tilde{\xi}_w^n\|_\infty \leq Ch. \quad (6.2.31)$$

因此, 结合 (6.2.28)(6.2.29)(6.2.20),(6.2.19)(6.2.30),(6.2.31),(6.2.16), 在 $\tau \leq C_{CFL}h^{\frac{4}{3}}$ 的 CFL 条件下, 对于充分小的 h 我们有:

$$\|\tilde{\xi}_u^{n+1}\|^2 - \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \frac{\tau}{4}\alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 + \frac{\tau}{4}\alpha(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n]^2 \leq C \left(\|\tilde{\xi}_u^n\|^2 \tau + h^{2k+1}\tau + \tau^5 \right), \quad (6.2.32)$$

其中 C 与 $n, h, \tau, \tilde{u}_h^n$ 无关. 由归纳法, 我们有:

$$\|\tilde{\xi}_u^{n+1}\|^2 - \|\tilde{\xi}_u^0\|^2 + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^n \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^m) [\tilde{\xi}_u^m]^2 \tau \leq C \left(\sum_{m=0}^n \|\tilde{\xi}_u^m\|^2 \tau + h^{2k+1} + \tau^4 \right),$$

由 Gronwall's 不等式, 我们可以得到如下误差估计:

$$\|\tilde{\xi}_u^{n+1}\|^2 \leq \|\tilde{\xi}_u^{n+1}\|^2 + \sum_{m=0}^n \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^m) [\tilde{\xi}_u^m]^2 \leq C_0 (h^{2k+1} + \tau^4), \quad (6.2.33)$$

上式在先验假设 (6.2.16) 成立的条件下成立, 其中 C_0 与 $n, h, \tau, \tilde{u}_h^n, \tilde{w}_h^n$ 无关, 则定理 2.7.1 的第一个结论 (2.7.1) 成立. 最后, 我们来确定下先验假设 (6.2.16) 的正确性, 如果第 n 层满足 (6.2.16), 则结合 (6.2.33) 和投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性 (2.5.5), 可得:

$$\begin{aligned}\|\tilde{e}_u^{n+1}\| &= \|u^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}\| = \|\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\eta}_u^{n+1}\| \\ &\leq \|\tilde{\xi}_u^{n+1}\| + \|\tilde{\eta}_u^{n+1}\| \leq C_0 \left(h^{k+\frac{1}{2}} + \tau^2 \right) + Ch^{k+1},\end{aligned}\quad (6.2.34)$$

因为考虑的是高阶 ($k \geq 2$) 分段三角基有限元空间 $\tilde{V}_h^k$, 由 (6.2.34) 知, 当 h 足够小时, $\|u^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}\| \leq h^{\frac{3}{2}}$ 显然成立, 这表明, 若第 n 层满足 (6.2.16), 则第 $(n+1)$ 层也满足 (6.2.16), 然后前面验证过第 0 层也满足 (6.2.16), 这就表明了先验假设 (6.2.16) 是合理的, 这就完成了定理 2.7.1 (2.7.1) 的证明.

一阶分段三角基有限元空间的误差估计

本节我们将会考虑在一般 CFL 条件 ($\tau \leq C_{CFL}h$) 下, 一阶分段三角基 ($k=1$) 的有限元空间的 RKDG 方法的误差估计, 和 6.2 中的分析步骤一样, 我们先给出一个先验假设: 对于足够小的 h , 有:

$$\|u^n - u_h^n\| \leq h, \quad (6.2.35)$$

仿照 6.2 中的验证步骤可知, 当 $n=0$ 时, $u_h^0 = \tilde{P}_h u_0(x)$ 是满足 (6.2.35) 的, 我们可以验证 (6.2.35) 的正确性, 即证明若第 n 层成立, 则 $n+1$ 层也成立. 对于线性数值通量 $f = cu$, 这个先验假设是不必要的. 接下来, 我们将分别分析 (2.2.8) 等式的左端和右端.

(2.2.8) 等式右端的误差估计. 和推导 (6.2.11) 的过程一样, 利用 Taylor 展开到二阶导数, 可得:

$$\begin{aligned}\tilde{K}^n(\tilde{v}_h) &\leq \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2 + \frac{M(\varepsilon)\tau^2}{h} \alpha^2 \left(\hat{h}, \tilde{u}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_u^n \right]^2 + \left(\frac{C_*\tau^2}{h^2} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 + C\tau^2 \right) \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 \\ &\quad + (C + C_* \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2) h^3 \tau - \sum_{j=1}^N \tau f'(u_j^n) \int_{I_j} \tilde{v}_h \partial_x \tilde{\xi}_u^n dx,\end{aligned}\quad (6.2.36)$$

在一阶分段三角基有限元的情况下, 注意到, 对任意函数 g_h , 有:

$$g_h = \bar{g}_h + (g_h - \bar{g}_h), \quad (6.2.37)$$

其中 $\bar{g}_h$ 是 g_h 在区间 I_j 上的平均值, 即 $\int_{I_j} (g_h - \bar{g}_h) dx = 0$, ($1 \leq j \leq N$)

因为本节中讨论的 $\tilde{V}_h^k$ 是一阶分段三角基有限元空间, 所以由 $\tilde{\xi}_u^n \in \tilde{V}_h^k$, 可知: 其

导函数 $\partial_x \tilde{\xi}_u^n$ 在每个区间 I_j 上是常数, 因此对任意函数 g_h , 有:

$$\int_{I_j} (g_h - \bar{g}_h) \partial_x \xi_u^n dx = 0, \quad 1 \leq j \leq N \quad (6.2.38)$$

令 $g_h = \tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n$, 注意到 $g_h, g_h - \bar{g}_h \in \tilde{V}_h^k$, 由 (2.2.5a) 和 (6.2.37), 经过一个简单的计算, 有:

$$\|g_h - \bar{g}_h\|^2 = (g_h, g_h - \bar{g}_h) = (\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n, g_h - \bar{g}_h) = \tilde{K}(g_h - \bar{g}_h), \quad (6.2.39)$$

在 (6.2.36) 中取 $v_h = g_h - \bar{g}_h$, 则 (6.2.36) 的最后一项消失, 由 (6.2.39), 当 ε 足够小时, 我们有:

$$\|g_h - \bar{g}_h\|^2 \leq \frac{M\tau^2}{h} \alpha^2(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 + \left(C + \frac{C_*}{h^2} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \right) \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 \tau^2 + \beta(n) h^3 \tau, \quad (6.2.40)$$

其中 $\beta(n) = C + C_* \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2$, 注意到 $\partial_x g_h = \partial_x (g_h - \bar{g}_h)$ 和针对三角基情形的逆不等式 (2.6.9a), 有:

$$\begin{aligned} \|\partial_x (\xi_w^n - \xi_u^n)\|^2 &= \|\partial_x g_h\|^2 \leq \|\partial_x (g_h - \bar{g}_h)\|^2 \leq Ch^{-2} \|g_h - \bar{g}_h\|^2 \\ &= \frac{M\tau^2}{h^3} \alpha^2(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 + \left(\frac{C}{h^2} + \frac{C_*}{h^4} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \right) \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 \tau^2 + \beta(n) h \tau, \end{aligned} \quad (6.2.41)$$

利用 $\alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n)$ 的有界性和针对三角基情形的逆不等式 (2.6.9b), 我们可得到 (2.2.8) 右端项的误差估计:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n\|^2 &\leq C (\Xi(n) h^3 \tau + \tau^6) + \delta_1(n) \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 \tau + \delta_2(n) \alpha(\hat{h}, \tilde{w}_h^n) [\tilde{\xi}_w^n]^2 \tau \\ &\quad + \left(\frac{C_* \tau^2}{h^2} (\|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 + \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2) + \frac{C_* \tau^4}{h^4} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 + C \tau^2 \right) \|\tilde{\xi}_u^n\|^2, \end{aligned} \quad (6.2.42)$$

上式在 CFL 条件: $\tau \leq C_{CFL} h$ 下成立, 其中 C_{CFL} 将在后续中确定.

其中 C, C_* 与 $n, h, \tau, \tilde{u}_h^n, \tilde{w}_h^n$ 无关, $\Xi(n) = 1 + C_* \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 + C_* \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2$

$$\delta_1(n) = \frac{M\tau}{h} \max_{1 \leq j \leq N} \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n)_{j+\frac{1}{2}} + \frac{M\tau^3}{h^3} \max_{1 \leq j \leq N} \alpha^3(\hat{h}, \tilde{u}_h^n)_{j+\frac{1}{2}}, \quad (6.2.43)$$

$$\delta_2(n) = \frac{M\tau}{h} \max_{1 \leq j \leq N} \alpha(\hat{h}, \tilde{w}_h^n)_{j+\frac{1}{2}}, \quad (6.2.44)$$

其中 M 只与 ε 有关, 将它和 (6.2.20) 相比较, 发现对于一阶分段三角基有限元空间的情形, (6.2.20) 中 $\frac{\tau^4}{h^4}$ 项的系数消失了, 这就是为什么这里的 CFL 条件可取为 $\tau \leq C_{CFL}h$ 而不用取为:

$$\tau \leq C_{CFL}h^{\frac{4}{3}}.$$

(2.2.8) 等式左端的误差估计. 我们将分别估计 $\tilde{K}^n(\tilde{\xi}_u^n)$ 和 $\tilde{L}^n(\tilde{\xi}_u^n)$, 并以 $\tilde{K}^n(\tilde{\xi}_u^n)$ 举例, 我们仿照 6.2 来分析 $\tilde{K}^n(\tilde{\xi}_u^n)$, 并分析 (6.2.21) 中的每一项, W_1, W_4 的分析与 (6.2.22)(6.2.27) 一样, 我们重点分析 W_2, W_3 , 由 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} f(u^n) - f(\tilde{u}_h^n) &= f'(u^n) \tilde{\xi}_u^n - \frac{1}{2} f^{(2)}(u^n) (\tilde{\xi}_u^n)^2 - f'(u^n) \tilde{\eta}_u^n + f^{(2)}(u^n) \tilde{\xi}_u^n \tilde{\eta}_u^n \\ &\quad - \frac{1}{2} f^{(2)}(u^n) (\tilde{\eta}_u^n)^2 - \frac{1}{6} f_u^{(3)} (\tilde{\xi}_u^n - \tilde{\eta}_u^n)^3 \\ &\triangleq \phi_1 + \cdots + \phi_6, \end{aligned} \tag{6.2.45}$$

$$\begin{aligned} f(u^n) - f(\bar{u}_h^n) &= f'(u^n) \bar{\xi}_u^n - \frac{1}{2} f^{(2)}(u^n) (\bar{\xi}_u^n)^2 - f'(u^n) \bar{\eta}_u^n + f^{(2)}(u^n) \bar{\xi}_u^n \bar{\eta}_u^n \\ &\quad - \frac{1}{2} f^{(2)}(u^n) (\bar{\eta}_u^n)^2 - \frac{1}{6} f_u^{(3)} (\bar{\xi}_u^n - \bar{\eta}_u^n)^3 \\ &\triangleq \psi_1 + \cdots + \psi_6, \end{aligned} \tag{6.2.46}$$

其中 $f_u^{(3)}$ 和 $\tilde{f}_u^{(3)}$ 是一些平均值, 则我们有 $W_2 = \sum_{i=1}^6 \hat{T}_i$, $W_3 = \sum_{i=1}^6 \hat{Y}_i$, 其中 $\hat{T}_i = \tau \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \phi_i \partial_x \xi_u^n dx$, $\hat{Y}_i = \tau \sum_{j=1}^N (\psi_i)_{j+\frac{1}{2}} [\xi_u^n]_{j+\frac{1}{2}}$, 经过一个简单的分部积分, 有:

$$\hat{T}_1 + \hat{Y}_1 = -\frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \partial_x f'(u^n) (\xi_u^n)^2 dx, \text{ 这表明: } \hat{T}_1 + \hat{Y}_1 \leq C \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 \tau,$$

同理, 我们有:

$\hat{T}_2 + \hat{Y}_2 = \frac{\tau}{24} \sum_{j=1}^N f^{(2)}(u^n)_{j+\frac{1}{2}} [\tilde{\xi}_u^n]_{j+\frac{1}{2}}^3 + \frac{\tau}{6} \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \partial_x f^{(2)}(u^n) (\tilde{\xi}_u^n)^3 dx$, 注意到, 由 Taylor 展开, 有 $f^{(2)}(u^n) [\tilde{\xi}_u^n] = f^{(2)}(\tilde{u}_h^n) [\tilde{\eta}_h^n] - f^{(2)}(\tilde{u}_h^n) [\tilde{u}_h^n] + f^{(3)} [\tilde{\xi}_u^n] \tilde{e}_u^n$, 结合引理 2.1.2 (2.1.7d) 和投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性 (2.5.5), 可得在每个边界点 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处, 有:

$$-\frac{1}{24} f^{(2)}(u^n) [\tilde{\xi}_u^n] \leq \frac{1}{3} \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) + C_*(h + \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2),$$

则我们有:

$$\hat{T}_2 + \hat{Y}_2 \leq \frac{1}{3} \alpha(\hat{h}, \tilde{u}_h^n) [\tilde{\xi}_u^n]^2 \tau + C_*(C + \|\tilde{\xi}_u^n\|_\infty + h^{-1} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2) \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 \tau,$$

和 6.2 节一样, 将 $f'(u_j^n)$ 引入 $\hat{T}_3$, 将引理 2.1.2 (2.1.7c) 代入 $\hat{Y}_3$, 可得:

$$\hat{T}_3 + \hat{Y}_3 \leq \frac{1}{6} \alpha \left(\hat{h}, \tilde{u}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_u^n \right]^2 \tau + (C + C_* h^{-1} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2) \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 \tau + Ch^3 \tau,$$

由 Young's 不等式和针对三角基情形的逆不等式 (2.6.9a)(2.6.9b), 有:

$$\begin{aligned} \hat{T}_4 + \hat{Y}_4 &\leq C_* h^{-1} \|\tilde{\eta}_u^n\|_\infty \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 \tau \leq C_* \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\| \tau, \\ \hat{T}_5 + \hat{Y}_5 &\leq C_* h^{-1} \|\tilde{\eta}_u^n\|_\infty \left(\|\tilde{\eta}_u^n\| + h^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\eta}_u^n\|_{\Gamma_h} \right) \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\| \tau \leq C_* \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 \tau + C_* h^4 \tau, \\ \hat{T}_6 + \hat{Y}_6 &\leq C_* h^{-1} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \left(\left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 \tau + Ch^4 \tau \right). \end{aligned}$$

将上诉误差估计相加起来, 可得:

$$W_2 + W_3 \leq \phi(u^n) \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 \tau + \frac{1}{2} \alpha \left(\hat{h}, \tilde{u}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_u^n \right]^2 \tau + (C + C_* h^{-1} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2) h^3 \tau, \quad (6.2.47)$$

其中 $\phi(u^n) = C + C_* \left(\left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|_\infty + h^{-1} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \right)$.

结合 (6.2.22)(6.2.47)(6.2.27), 可得:

$$\tilde{K}^n \left(\tilde{\xi}_u^n \right) \leq \phi(u^n) \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 \tau - \frac{\tau}{4} \alpha \left(\hat{h}, \tilde{u}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_u^n \right]^2 + (C + C_* h^{-1} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2) h^3 \tau, \quad (6.2.48)$$

同样的步骤, 可得:

$$\tilde{L}^n \left(\tilde{\xi}_w^n \right) \leq \phi(w^n) \left\| \tilde{\xi}_w^n \right\|^2 \tau - \frac{\tau}{4} \alpha \left(\hat{h}, \tilde{w}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_w^n \right]^2 + (C + C_* h^{-1} \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2) h^3 \tau + C\tau^5, \quad (6.2.49)$$

其中 $\phi(w^n) = C + C_* \left(\left\| \tilde{\xi}_w^n \right\|_\infty + h^{-1} \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2 \right)$.

至此, 我们得到了 (2.2.8) 等号左端的误差估计.

下面, 我们将利用先验假设 (6.2.35) 来得到我们想要的误差估计. 由针对三角基情形的逆不等式 (2.6.9c) 和投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性 (2.5.5), 先验假设 (6.2.35) 表明:

$$\|u^n - \tilde{u}_h^n\|_\infty \leq Ch^{\frac{1}{2}}, \quad \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|_\infty \leq Ch^{\frac{1}{2}}. \quad (6.2.50)$$

由 (6.2.35) 和 (6.2.19), 我们有 $\left\| W^n - \tilde{W}_h^n \right\|_\infty \leq Ch$ 因此, 由针对三角基情形的逆不等式 (2.6.9c) 和投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性 (2.5.5), 我们有:

$$\left\| W^n - \tilde{W}_h^n \right\|_\infty \leq Ch^{\frac{1}{2}}, \quad \left\| \tilde{\xi}_w^n \right\|_\infty \leq Ch^{\frac{1}{2}}. \quad (6.2.51)$$

结合 (6.2.48)(6.2.49)(6.2.42)(6.2.19)(6.2.50)(6.2.51), 在一般的 CFL 条件下 $\tau \leq C_{CFL}h$, 对于足够小的 h , 有:

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{\xi}_u^{n+1} \right\|^2 - \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 + \frac{1}{4} \alpha \left(\hat{h}, \tilde{u}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_u^n \right]^2 \tau + \frac{1}{4} \alpha \left(\hat{h}, \tilde{w}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_w^n \right]^2 \tau \\ & \leq C \left(\left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 \tau + h^3 \tau + \tau^5 \right) + \delta_1(n) \alpha \left(\hat{h}, \tilde{u}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_u^n \right]^2 \tau + \delta_2(n) \alpha \left(\hat{h}, \tilde{w}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_w^n \right]^2 \tau. \end{aligned} \quad (6.2.52)$$

其中 C 与 $n, h, \tau, \tilde{u}_h, \tilde{w}_h$ 无关.

因为 (6.2.43)(6.2.44) 中定义的 M 与 h, τ 无关, 所以存在两个与 h, τ 无关的最大正常数 r_1, r_2 , 使得:

$$Mr_1 + Mr_1^3 \leq \frac{1}{8}, \quad Mr_2 \leq \frac{1}{8}.$$

由 $\tau^n \leq C_{CFL}^n h$, 我们定义在每个时间层 $t = t^n$ 的每个时间步长为 τ^n , 其中的 CFL 数 C_{CFL}^n 定义为:

$$C_{CFL}^n = \min \left(r_1 \left(\max_{1 \leq j \leq N} \alpha \left(\hat{h}, \tilde{u}_h^n \right)_{j+\frac{1}{2}} \right)^{-1}, r_2 \left(\max_{1 \leq j \leq N} \alpha \left(\hat{h}, \tilde{w}_h^n \right)_{j+\frac{1}{2}} \right)^{-1} \right), \quad (6.2.53)$$

因为时间步长在这这是常量, 所以我们定义 $C_{CFL} = \min_{n \leq N_\tau} C_{CFL}^n$, 其中 N_τ 连续解存在的最大时间层迭代次数. 则在一般的 CFL 条件下 $\tau \leq C_{CFL}h$, 由 (6.2.52), 有:

$$\left\| \tilde{\xi}_u^{n+1} \right\|^2 - \left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 + \frac{\tau}{8} \alpha \left(\hat{h}, \tilde{u}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_u^n \right]^2 + \frac{\tau}{8} \alpha \left(\hat{h}, \tilde{w}_h^n \right) \left[\tilde{\xi}_w^n \right]^2 \leq C \left(\left\| \tilde{\xi}_u^n \right\|^2 \tau + h^3 \tau + \tau^5 \right),$$

则由 Gronwall's 不等式, 可得如下误差估计:

$$\left\| \tilde{\xi}_u^{n+1} \right\|^2 + \sum_{m=0}^n \alpha \left(\hat{h}, \tilde{u}_h^m \right) \left[\tilde{\xi}_u^m \right]^2 \tau \leq C_0 h^3, \quad n \leq N_\tau. \quad (6.2.54)$$

其中 C_0 与 $n, h, \tau, \tilde{u}_h^n, \tilde{w}_h$ 无关, 即证定理2.7.1(2.7.2) 式最后, 来验证下先验假设 (6.2.35), 如果它在第 n 时间层成立, 则由 (6.2.54) 和投影算子 $\tilde{P}_h$ 的近似属性 (2.5.5), 有: $\|u^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}\| \leq C_0 h^{\frac{3}{2}}$, 这表明, 对于充分小的 h , 有 $\|u^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}\| \leq h$ 成立, 先验假设 (6.2.35) 对 $(n+1)$ 时间层也成立, 而在前面也验证过, (6.2.35) 对第 0 时间层是成立的, 这就验证了先验假设 (6.2.35) 的合理性. 综上, 即完成了定理2.7.1 在普通单调数值通量情形下的证明.

迎风格式的最佳误差逼近

这一节我们研究定理2.7.1 在迎风数值通量下的误差分析.

数值通量 $\hat{h}(p)$ 被称为迎风数值通量, 如果它满足:

$$\hat{h}(p) = \begin{cases} f(p^-), & f'(q) \geq 0, \quad q \in [\min(p^-, p^+), \max(p^-, p^+)] \\ f(p^+), & f'(q) \leq 0, \quad q \in [\min(p^-, p^+), \max(p^-, p^+)] \end{cases}$$

我们引入新的投影 $\tilde{R}_h$ 来代替 (2.1.1) 中的 L^2 投影, $\tilde{R}_h p$ 定义如下: 如果 $f'(u^n)$ 在 I_j 上不变号 (恒为正或恒为负), 则:

$$\tilde{R}_h(p)(x_{j,l}) - p(x_{j,l}) = 0, \quad l = 0, \dots, k, \quad (6.2.55)$$

其中 $x_{j,l}$ 是区间 I_j 上的 Gauss - Radau 点, 并且:

$$(i) \quad x_{j,k} = x_{j+\frac{1}{2}}, \quad f'(u^n) \geq 0, \quad x \in I_j, \quad (6.2.56)$$

$$(ii) \quad x_{j,0} = x_{j-\frac{1}{2}}, \quad f'(u^n) \leq 0, \quad x \in I_j,$$

$$(iii) \text{ 如果 } f'(u^n) \text{ 在 } I_j \text{ 上变号, 则: } \tilde{R}_h(p) = \tilde{P}_h(p).$$

为了方便, 我们依然定义投影近似误差为 $\tilde{\eta}_p = p - \tilde{R}_h p$, ($p = u, w$), 容易验证不等式 (2.5.5) 仍然成立^[1], 且对任意 $1 \leq j \leq N, n < N_\tau$, 有:

$$\left| \int_{I_j} (p^n - \tilde{R}_h p^n) \partial_x \tilde{v}_h dx \right| \leq c_k h^{k+1} \|p\|_{L^\infty(H^{k+2}(I_j))} \|\tilde{v}_h\|_{I_j}, \quad (6.2.57)$$

其中 c_k 只与 k 有关^[36].

注意到, 对于情况 (i), $\eta_u^n(x_{j+\frac{1}{2}}^-) = \eta_w^n(x_{j+\frac{1}{2}}^-) = 0$, 对于情况 (ii), $\eta_u^n(x_{j-\frac{1}{2}}^+) = \eta_w^n(x_{j-\frac{1}{2}}^+) = 0$, 对于情况 (iii), 就是说 I_j 上有某个点在 $t = 0$ 的时刻满足 $f'(u_0) = 0$, 那么这个点处的特征线就是垂直的, 在未来的所有时间层, I_j 都将属于情况 (iii), 因此, 如果一个区间 I_j 在初始时刻属于 (i) (ii) (iii) 的某一种, 那么在未来的所有时刻, 它都将属于该情况, 因此不等式 (2.5.12) 对于投影 $\tilde{R}_h$ 也成立.

定义 $\tilde{\xi}_u = R_h u - u_h, \tilde{\xi}_w = R_h w - w_h$, 我们可以得到和 (2.2.8) 一样的能量方程, 为了得到在迎风数值通量下的最佳误差逼近, 我们将会和之前一样分析 (2.2.8) 的左端和右端. 和之前的主要不同是区间 I_j 边界处的误差估计. 我们定义一个参考

值 $\tilde{q}_h^n$, ($q = u, w$), 如果 $f'(u^n)$ 在 $I_j \cup I_{j+1}$ 上没有保持恒负, 则定义这个参考值为 $\tilde{q}_h^{n,-}$, 否则定义为 $\tilde{q}_h^{n,+}$, $q = u, w$.

根据上面的这些修改, 我们来估计 $(\tilde{L}^n - \tilde{K}^n)(v_h)$, 其中 $\Theta_1(\tilde{v}_h)$ 和 $\Theta_2(\tilde{v}_h)$ 的估计和前面一样, 只是涉及到数值通量的 $\Theta_3(\tilde{v}_h)$ 和 $\Theta_4(\tilde{v}_h)$ 需要仔细分析, 所以, 对于 $f'(u^n)$ 不同的符号变换的情况, 我们需要重新分析 $\hat{\Pi}(n) = f(w^n) - \hat{h}(w_h^n) - f(u^n) + \hat{h}(u_h^n)$, 如果 $f'(u^n)$ 在 $I_j \cup I_{j+1}$ 上没有保持恒负, 则在每个边界点 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处, 有如下表达式:

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}(n) &= f(w^n) - f(w_h^{n,-}) - f(u^n) + f(u_h^{n,-}) - f(u_h^{n,-}) + \hat{h}(u_h^n) + f(w_h^{n,-}) - \hat{h}(w_h^n), \\ &\triangleq \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4, \\ \Lambda_1 &= f(w^n) - f(w_h^{n,-}), \\ \Lambda_2 &= -f(u^n) + f(u_h^{n,-}), \\ \Lambda_3 &= -f(u_h^{n,-}) + \hat{h}(u_h^n), \\ \Lambda_4 &= f(w_h^{n,-}) - \hat{h}(w_h^n).\end{aligned}\tag{6.2.58}$$

否则, 将 (6.2.58) 中将参考值 $q_h^{n,-}$ 改为 $q_h^{n,+}$, ($q = u, w$) 即可. 因为 (i) (ii) (iii) 的分析是类似的, 我们只给出 (6.2.58) 在 (i) 的情形下的分析作为例子, 首先, 我们可以得到和 (6.2.5) 中 $\Lambda_1 + \Lambda_2$ 类似的 Taylor 展开, 只需要将 $\tilde{\xi}_q^{n,-}$ 和 $\tilde{\eta}_q^{n,-}$ 替换掉 $\tilde{\xi}_q^{n,-}$ 和 $\tilde{\eta}_q^{n,-}$, 除了 $Q_4 \triangleq -f'(u^n)(\tilde{\eta}_w^{n,-} - \tilde{\eta}_u^{n,-})$, 其余的项的误差估计都是类似的. 如果 $f'(u^n)$ 在 $I_j \cup I_{j+1}$ 上非负, 则由 $\tilde{R}_h$ 的定义, $Q_4 = 0$, 否则 $f'(u^n)$ 在 $I_j \cup I_{j+1}$ 上变号, 这表明 $\left|f'\left(u_{j+\frac{1}{2}}^n\right)\right| = O(h)$, 则由投影近似属性 (2.5.5), 有 $Q_4 = O\left(h^{k+\frac{3}{2}}\right)$, 因此我们可以得到:

$$|T_4(\tilde{v}_h)| \leq \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2 + Ch^{2k+2}\tau^2,\tag{6.2.59}$$

接下来, 我们将会估计 (6.2.58) 中的 Λ_3 和 Λ_4 , 以 Λ_3 为例, 对于 $f'(\cdot)$ 在 $u_h^{n,-}$ 和 $u_h^{n,+}$ 之间的符号变化的不同情形, 注意到迎风数值通量的性质, 我们有, 如果 $f'(\cdot)$ 是非负的, 则 $\Lambda_3 = 0$, 类似的, 如果 $f'(\cdot)$ 是非正的, 则 $\Lambda_3 = f(\tilde{u}_h^{n,+}) - f(\tilde{u}_h^{n,-})$. 注意到在这里 $f'(u^n)$ 在 $I_j \cup I_{j+1}$ 不恒为负, 所以存在一个值 u^* , 使得 $f'(u^*) = 0$, 经过一个简单的计算后, 我们可以得到 $|\Lambda_3| \leq C_*(h + \|\tilde{e}_h^n\|_\infty) \|\tilde{u}_h^n\|$, 否则, $f'(\cdot)$ 在 $\tilde{u}_h^{n,-}$ 和 $\tilde{u}_h^{n,+}$ 之间会变号, 则对于迎风数值通量, 我们有 $|\Lambda_3| \leq C_* [\tilde{u}_h^n]^2$, 将上述结论综合起来, 因为 $[\tilde{u}_h^n] = -[\tilde{e}_h^n]$, 我们有:

$$|\Lambda_3| \leq C_*(h + \|\tilde{e}_h^n\|_\infty) \|\tilde{e}_h^n\|,\tag{6.2.60}$$

因此我们有:

$$|T_6(\tilde{v}_h)| \leq \frac{C_*\tau^2}{h^2} (h^2 + \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2) \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \frac{C_*\tau^2}{h} (h^2 + \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2) \|\tilde{\eta}_u^n\|_{\Gamma_h}^2 + \varepsilon \|\tilde{v}_h\|^2,$$

类似地, 我们可以得到 $T_7(\tilde{v}_h)$ 的误差估计. 则我们可以获得 $\Theta_3(\tilde{v}_h)$ 的误差估计, 同样的方法我们可以获得 $\Theta_4(\tilde{v}_h)$ 的误差估计.

在上面的分析中, 我们仍然留下了和 6.2 节中一样的未估计的三项, 我们仍然将这三项记作 $S_5(\tilde{v}_h), T_5(\tilde{v}_h), \tilde{T}_5(\tilde{v}_h)$, 这三项之和的分析和 (6.2.8) 的分析一样. 则我们可以将这些误差估计整合起来得到 $(\tilde{L}^n - \tilde{K}^n)(\tilde{v}_h)$ 的估计, 其中 (6.2.11) 中出现的显示误差 $C(\Xi(n)h^{2k+1}\tau + \tau^6)$ 改进为 $C(\Delta(n)h^{2k+2}\tau + \tau^6)$, 其中 $\Delta(n) = 1 + C_*h^{-1}(\|e_u^n\|_\infty^2 + \|e_w^n\|_\infty^2)$, 和 6.2 节的步骤一样, 我们先后令 $v_h = \xi_u^{n+1} - \xi_w^n$, $v_h = -\tau f'(u_j^n) \partial_x(\xi_w^n - \xi_u^n)$, 可以得到 $(\tilde{L}^n - \tilde{K}^n)(\tilde{v}_h)$ 的新的误差估计, 取充分小的 ε , 可以得到如下形式的关键不等式:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n\|^2 &\leq C(\Delta(n)h^{2k+2}\tau + \tau^6) + \frac{M\tau^2}{h} |f'(w^n)|^2 [\tilde{\xi}_w^n]^2 + \frac{M\tau^2}{h} |f'(u^n)|^2 [\tilde{\xi}_u^n]^2 \\ &\quad + \frac{C_*\tau^2}{h^2} \left(\|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2 \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 \right) + C\tau^2 \left(\|\tilde{\xi}_u^n\|^2 + \|\tilde{\xi}_w^n\|^2 \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \tau^2 |f'(u_j^n)|^2 \int_{I_j} \left(\partial_x(\tilde{\xi}_w^n - \tilde{\xi}_u^n) \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (6.2.61)$$

其中 C 和 C_* 与 n, h, τ 无关, M 只与 ε 有关,

$$|f'(p^n)|^2 [\xi_p^n]^2 = \sum_{1 \leq j \leq N} \left| f'\left(p_{j+\frac{1}{2}}^n\right) \right|^2 [\xi_p^n]_{j+\frac{1}{2}}^n, \quad (p = u, w).$$

跟随 6.2 节的思路, 我们使用 (2.2.5a)-(2.2.7) 的误差方程去估计 (2.2.8) 等号右端的 $\|\xi_u^{n+1} - \xi_w^n\|^2$, 以 $k = 1$ 来举例, 沿着 6.2 的思路, 并注意到本节中新的参考值 $\tilde{q}_h^n, (q = u, w)$ 的定义, 我们可以得到 $\|f'(u_j^n) \partial_x(\xi_w^n - \xi_u^n)\|$ 的误差估计, 将该估计结合 (6.2.19) 的误差估计代入 (6.2.61), 可得在 CFL 条件 ($\tau \leq C_{CFL}h$) 下:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\xi}_u^{n+1} - \tilde{\xi}_w^n\|^2 &\leq C(\Delta(n)h^4\tau + \tau^6) + \delta_1(n) |f'(u^n)| [\tilde{\xi}_u^n]^2 \tau + \delta_2(n) |f'(w^n)| [\tilde{\xi}_w^n]^2 \tau \\ &\quad + \left(\frac{C_*\tau^2}{h^2} (\|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 + \|\tilde{e}_w^n\|_\infty^2) + \frac{C_*\tau^4}{h^4} \|\tilde{e}_u^n\|_\infty^2 + C\tau^2 \right) \|\tilde{\xi}_u^n\|^2, \end{aligned} \quad (6.2.62)$$

其中 C 和 C_* 与 n, h, τ 无关:

$$\delta_1(n) = \frac{M\tau}{h} \|f'(u^n)\|_\infty + \frac{M\tau^3}{h^3} \|f'(u^n)\|_\infty^3, \quad \delta_2(n) = \frac{M\tau}{h} \|f'(w^n)\|_\infty, \quad (6.2.63)$$

对于 $k \geq 2$ 的情形, (2.2.8) 等号右端的 $\|\xi_u^{n+1} - \xi_w^n\|^2$ 的误差估计, 和 (6.2.62) 的思路一样. 接下来我们将使用类似的方法去估计 (6.2.62) 等号左端的式子, 我们需要将 (6.2.21) 中每个边界点处的 $\bar{u}_h$ 用 $\tilde{u}_h^{n,+}, \tilde{u}_h^{n,-}$ 来代替, 和 6.2 的思路一样, 我们可以得到如下的误差估计:

$$\tilde{K}^n(\tilde{\xi}_u^n) \leq \psi(u^n) \|\xi_u^n\|^2 \tau - \frac{1}{2} |f'(u^n)| [\xi_u^n]^2 \tau + (C + C_* h^{-2} \|e_u^n\|_\infty^2) h^{2k+2} \tau, \quad (6.2.64)$$

$$\tilde{L}^n(\tilde{\xi}_u^n) \leq \psi(w^n) \|\xi_w^n\|^2 \tau - \frac{1}{2} |f'(w^n)| [\xi_w^n]^2 \tau + (C + C_* h^{-2} \|e_w^n\|_\infty^2) h^{2k+2} \tau + C\tau^5, \quad (6.2.65)$$

其中 $\Psi(p^n) = C + C_* \left(h^{-1} \|e_p^n\|_\infty + h^{-2} \|e_p^n\|_\infty^2 \right)$, $(p = u, w)$, C 和 C_* 与 n, h, τ 无关最后, 由先验假设: 对于足够小的 h , 有: $\|u^n - \tilde{u}_h^n\| \leq h^{\frac{3}{2}}$, 可知 $\|\tilde{e}_u^n\|_\infty \leq Ch$, $\|\tilde{e}_w^n\|_\infty \leq Ch$, 通过结合 (6.2.62)(6.2.64)(6.2.65) 我们可以得到迎风数值通量的最优误差估计.

至此, 定理2.7.1全部证毕.

Bibliography

- [1] Qiang Zhang, Chi-Wang Shu. Error Estimates to Smooth Solutions of Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Scalar Conservation Laws[J/OL]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2004, 42(2): 641-666. DOI: [10.1137/S0036142902404182](https://doi.org/10.1137/S0036142902404182).
- [2] Qiang Zhang , Chi-Wang Shu. Error Estimates to Smooth Solutions of Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Symmetrizable Systems of Conservation Laws[J/OL]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2006, 44(4): 1703-1720. <http://www.jstor.org/stable/40232688>.
- [3] Qiang Zhang , Chi-Wang Shu. Stability Analysis and A Priori Error Estimates of the Third Order Explicit Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Scalar Conservation Laws [J/OL]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2010, 48(3): 1038-1063[2023-03-02]. <http://www.jstor.org/stable/41062632>.
- [4] Liangyue Ji , Yan Xu , Jennifer Ryan. Negative-order norm estimates for nonlinear hyperbolic conservation laws[J/OL]. Journal of Scientific Computing, 2013, 54(2-3): 269-310. DOI: [10.1007/s10915-012-9668-6](https://doi.org/10.1007/s10915-012-9668-6).
- [5] J. H. Bramble , A. H. Schatz. Higher Order Local Accuracy by Averaging in the Finite Element Method[J/OL]. Mathematics of Computation, 1977, 31(137): 94-111[2023-03-02]. <http://www.jstor.org/stable/2005782>.
- [6] Bernardo Cockburn , Fengyan Li , Chi-Wang Shu. Discontinuous Galerkin methods for equations with divergence-free solutions: preliminary results[M/OL]//K.J. Bathe. Computational Fluid and Solid Mechanics 2003. Oxford: Elsevier Science Ltd, 2003: 1900-1902. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080440460504656>. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-008044046-0.50465-6>.
- [7] Bernardo Cockburn , Mitchell Luskin, Chi-Wang Shu , Endre Süli. Enhanced accuracy by post-processing for finite element methods for hyperbolic equations[J]. Mathematics of Computation, 2003, 72(242): 577-606.
- [8] Jennifer Ryan , Chi-Wang Shu. On a One-Sided Post-Processing Technique for the Discontinuous Galerkin Methods[J/OL]. Methods and Applications of Analysis, 2003, 10(2): 295 - 308. <https://doi.org/10.1112/maa/1119018758>. DOI: [maa/1119018758](https://doi.org/10.1112/maa/1119018758).
- [9] Sean Curtis, Robert Kirby, Jennifer Ryan , Chi-Wang Shu. Post-Processing for the Discontinuous Galerkin Method over Non-Uniform Meshes[J/OL]. SIAM J. Scientific Computing, 2007, 30: 272-289. DOI: [10.1137/070681284](https://doi.org/10.1137/070681284).

- [10] Michael Steffen, Sean Curtis, Kirby Robert, Jennifer Ryan. Investigation of Smoothness-Increasing Accuracy-Conserving Filters for Improving Streamline Integration through Discontinuous Fields[J/OL]. IEEE Transactions on Visualization , Computer Graphics, 2008, 14(3): 680-692. DOI: [10.1109/TVCG.2008.9](https://doi.org/10.1109/TVCG.2008.9).
- [11] Bramble James , Schatz Alfred . Higher order local accuracy by averaging in the finite element method[J]. Mathematics of Computation, 1977, 31(137): 94-111.
- [12] Ling Yuan and Chi-Wang Shu. Discontinuous Galerkin method based on non-polynomial approximation spaces[J/OL]. Journal of Computational Physics, 2006, 218(1): 295-323. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999106000854>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.02.013>.
- [13] John Holte. Discrete Gronwall lemma and applications[C]//MAA-NCS meeting at the University of North Dakota: volume 24. 2009: 1-7.
- [14] Chi-Wang Shu , Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. Journal of computational physics, 1988, 77(2): 439-471.
- [15] Chi-Wang Shu. Total-Variation-Diminishing Time Discretizations[J/OL]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1988, 9(6): 1073-1084. <https://doi.org/10.1137/0909073>.
- [16] Sigal Gottlieb , Chi-Wang Shu. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes[J]. Mathematics of computation, 1998, 67(221): 73-85.
- [17] Sigal Gottlieb , Chi-Wang Shu , Eitan Tadmor. Strong stability-preserving high-order time discretization methods[J]. SIAM review, 2001, 43(1): 89-112.
- [18] Jeffrey Racine. A primer on regression splines[EB/OL]. 2014. <http://cran.r-project.org/web/packages/crs/vignettes/splineprimerpdf>.
- [19] Bernardo Cockburn , Suchung Hou , Chi-Wang Shu. The Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws. IV: The Multidimensional Case[J/OL]. Mathematics of Computation, 1990, 54(190): 545-581[2023-03-16]. <http://www.jstor.org/stable/2008501>.
- [20] Bernardo Cockburn , San-Yih Lin , Chi-Wang Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: One-dimensional systems [J/OL]. Journal of Computational Physics, 1989, 84(1): 90-113. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999189901836>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(89\)90183-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90183-6).
- [21] Bernardo Cockburn , Chi-Wang Shu. TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws II: General Framework[J/OL]. Mathematics of Computation, 1989, 52(186): 411-435[2023-03-16]. <http://www.jstor.org/stable/2008474>.

- [22] Long'an Ying. A second order explicit finite element scheme to multidimensional conservation laws and its convergence[J/OL]. Science in China Series A Mathematics, 2000, 43: 945-957. DOI: [10.1007/BF02879800](https://doi.org/10.1007/BF02879800).
- [23] Ciarlet. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M/OL]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898719208>.
- [24] 中国科学院研究生教学丛书: 有限元方法的数学基础[M]. 科学出版社, 2004.
- [25] Quarteroni Valli. Numerical approximation of partial differential equations: volume 23[M]. Springer Science & Business Media, 2008.
- [26] Mock , Lax. Computation of discontinuous solutions of linear hyperbolic equations[J/OL]. Commun. Pure Appl. Math.; (United States), 1978, 31. <https://www.osti.gov/biblio/5724851>. DOI: [10.1002/cpa.3160310403](https://doi.org/10.1002/cpa.3160310403).
- [27] Liangyue Ji, Yan Xu , Jennifer Ryan. Accuracy-enhancement of discontinuous galerkin solutions for convection-diffusion equations in multiple-dimensions[J]. Mathematics of computation, 2012, 81(280): 1929-1950.
- [28] Xiong Meng, Jennifer Ryan. Discontinuous Galerkin methods for nonlinear scalar hyperbolic conservation laws: divided difference estimates and accuracy enhancement[J]. Numerische mathematik, 2017, 136: 27-73.
- [29] Guri Ivanovich Marchuk. Construction of adjoint operators in non-linear problems of mathematical physics[J]. Sbornik: Mathematics, 1998, 189(10): 1505.
- [30] Susanne C. Brenner , L. Ridgway Scott. The Mathematical Theory of Finite Element Methods [M/OL]. Springer New York, 2002. <https://doi.org/10.1007%2F978-1-4757-3658-8>. DOI: [10.1007/978-1-4757-3658-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3658-8).
- [31] Jennifer Ryan ,Chi-Wang Shu , Harold Atkins. Extension of a Post Processing Technique for the Discontinuous Galerkin Method for Hyperbolic Equations with Application to an Aeroacoustic Problem[J/OL]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2005, 26(3): 821-843. <https://doi.org/10.1137/S1064827503423998>.
- [32] Jennifer Ryan. Exploiting superconvergence through smoothness-increasing accuracy-conserving (SIAC) filtering[C]//Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations ICOSAHOM 2014: Selected papers from the ICOSAHOM conference, June 23-27, 2014, Salt Lake City, Utah, USA. Springer, 2015: 87-102.
- [33] Chi-Wang Shu , Osher. Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes[J/OL]. J. Comput. Phys., 1988, 77(2): 439-471. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(88\)90177-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90177-5).
- [34] Sigal Gottlieb , Chi-Wang Shu , Eitan Tadmor. Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods[J/OL]. SIAM Review, 2001, 43(1): 89-112. <https://doi.org/10.1137/>

S003614450036757X.

- [35] Bernardo Cockburn , Chi-Wang Shu. Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems[J]. Journal of scientific computing, 2001, 16: 173-261.
- [36] Bernardo Cockburn , Chi-Wang Shu ,Claes Johnson, Eitan Tadmor. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems[J]. Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Cetraro, Italy, June 23–28, 1997, 1998: 150-268.

致 谢

在这篇毕业论文完成之际，我要向所有给予我帮助和关心的人表示衷心感谢。首先，我要感谢我的导师邱建贤教授。他在我整个硕士研究期间都给予了我无尽的支持和指导，不仅教会了我专业知识，也引导我探索学术研究和未来职业方向。在我毕业季迷茫的阶段，邱老师给我提供了外校读博和校内科研助理的出路，虽然我最终没有走上继续读博的道路，但我依然非常感谢邱老师在我最迷茫的时候给我提供的选择。非常感谢邱老师的付出，他的耐心和激励成就了现在的我，也一直是坚定前行的动力。

其次，我特别要感谢我的家人。他们一直以来给予我无微不至的爱和关心。特别感谢母亲 25 年来的奉献。

此外，我要感谢我的同学们和朋友们。在学术研究和生活中，他们总是给予我巨大的鼓励和支持，帮助我度过了各种挑战和难关。我也要感谢他们的陪伴和友谊，对于我的成长和开拓都有着深远的影响。偶尔的聚餐给我的生活增添了不少乐趣，和他们在海边散步的景象将永远定格在我的记忆中，也将成为我三年来最珍贵的回忆。

最后，我要感谢母校厦门大学。在这里，我度过了人生中三年充实而珍贵的时光。母校对我提供了优秀的教育和全方位的支持，也为我提供了诸多展现自己的机会。在未来的工作生活中，我将以厦大人的身份，保持敬畏、谦虚和自信的态度，持续学习和提升自己，不断探索前行。同时，我也将感恩并回报那些一直支持和帮助我的人们，为社会做出自己的贡献，也展现母校的培养成果。再次向所有给予我帮助和关心的人们致以真挚的感谢！

厦门的海我永远记得。

厦门大学数学科学学院王昊
2023 年 5 月 13 日于厦门大学图书馆